

## CURBE BÉZIER

În CAGD se utilizează adesea curbele polinomiale, adică acele curbe definite de o parametrizare polinomială:

$$\mathbf{C} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

cu  $x, y, z$  polinoame de grad  $n$ . Maximul gradelor polinoamelor  $x, y, z$  se numește gradul curbei. Alegerea funcțiilor din această clasă pentru parametrizări de curbe (și suprafețe) este justificată de calculele simple necesare pentru evaluarea lor, ceea ce ne conduce la mărirea vitezei de lucru și la reducerea cumulării erorilor de calcul.

Cu ajutorul curbelor și suprafețelor astfel parametrizate se pot modela o mare diversitate de forme. Un argument în plus îl constituie teorema lui Weierstrass care afirmă că *orice funcție continuă*  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  este limita uniformă a unui șir de funcții polinomiale. Cu alte cuvinte o funcție continuă poate fi reprezentată, cu precizie arbitrar fixată, de o funcție polinomială.

O observație simplă ne asigură că nu se restrânge generalitatea considerând curbe polinomiale cu parametrizarea definită pe intervalul  $[0, 1]$ . Mai precis orice curbă polinomială  $\mathbb{C} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  poate fi reparametrizată polinomial de o aplicație  $\tilde{\mathbb{C}} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , iar aceasta se poate face cu ajutorul schimbării de variabilă  $\phi : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ ,  $\phi(s) = (1 - s) \cdot a + s \cdot b$ , considerând  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \circ \phi$ .

Fie  $\mathbf{C}$  o curbă polinomială de grad  $n$ . Atunci putem scrie

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} + a_{11} \cdot t + \dots + a_{1n} \cdot t^n \\ a_{20} + a_{21} \cdot t + \dots + a_{2n} \cdot t^n \\ a_{30} + a_{31} \cdot t + \dots + a_{3n} \cdot t^n \end{pmatrix}$$

și considerăm punctele  $A_i(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Astfel, formal,  $\mathbf{C}(t)$  se scrie sub forma:

$$\mathbf{C}(t) = A_0 + t \cdot A_1 + \dots + t^n \cdot A_n.$$

Scrierea este formală deoarece  $1 + t + t^2 + \dots + t^n \neq 1$  și deci nu are semnificație geometrică (dacă suma ar fi 1, atunci  $\mathbf{C}(t)$  ar fi o combinație baricentrică a punctelor  $A_i, i = \overline{0, n}$ ). S-a încercat, însă fără succes, găsirea unei interpretări în care modificarea unuia sau a multor puncte  $A_i$  influențează geometria curbei. Prin urmare, aceste puncte nu au semnificație geometrică și deci exprimarea unei parametrizări polinomiale relativ la baza canonică  $\mathcal{B} = \{1, t, \dots, t^n\}$  nu este utilă.

În încercarea de a proiecta forme cât mai variate pentru capotele de automobile, Bézier, inginer la uzinele Renault, a avut ideea exprimării funcțiilor polinomiale de grad  $n$  relativ la baza Bernstein

$$\mathcal{B}' = \{B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)\}$$

în locul bazei canonice. Polinoamele Bernstein sunt definite astfel:

$$B_i^n(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1 - t)^{n-i} \qquad \text{cu} \qquad C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n - i)!}.$$

**Observație.** Polinoamele Bernstein definite pe un interval arbitrar  $[a, b]$  se exprimă prin:

$$\tilde{B}_i^n(u) = C_n^i \cdot \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \cdot \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} \quad \text{cu} \quad u \in [a, b].$$

**Proprietăți ale polinoamelor Bernstein:**

- 1)  $B_i^n(t) > 0$  și  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t \in [0, 1];$
- 2)  $\left\| \begin{array}{l} B_0^n(0) = 1 \\ B_i^n(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} B_n^n(1) = 1 \\ B_i^n(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \end{array} \right.$
- 3) Avem relația de recurență:

$$B_i^n(t) = (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t).$$

O mulțime ordonată de puncte  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  se numește *poligon de control* (sau poligon caracteristic); punctele  $b_0, b_1, \dots, b_n$  se numesc *puncte de control* (sau puncte caracteristice). Dacă  $b_0 = b_n$  atunci avem un poligon închis. Se numește curbă Bézier definită de poligonul de control de mai sus, curba polinomială exprimată în baza Bernstein prin:

$$b(t) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot B_i^n(t).$$

*Proprietăți.*

- 1) Gradul unei curbe Bézier este mai mic cu o unitate decât numărul punctelor sale de control.
- 2) O curbă Bézier interpolează extremitățile poligonului său de control, deoarece  $b(0) = b_0$  și  $b(1) = b_n$ ; prin urmare, dacă  $b_0 = b_n$ , curba Bézier este închisă.

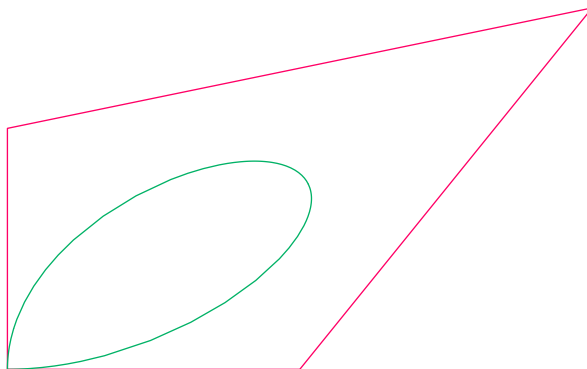


FIGURE 1. Curbă Bézier închisă

3) O curbă Bézier este inclusă în înfășurătoarea convexă a punctelor sale de control (curba Bézier fiind o combinație convexă a punctelor de control).

4) O curbă Bézier este invariantă față de inversarea ordinii punctelor sale de control, i.e. poligoanele de control  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  și  $(b_n, b_{n-1}, \dots, b_0)$  definesc aceeași curbă. Această proprietate este o consecință a relației evidente:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ .

5) O curbă Bézier este invariantă la schimbări afine de parametru.

6) O curbă Bézier este invariantă la transformări afine. Această proprietate este foarte utilă, de exemplu, atunci când curba este supusă unei succesiuni de rotații și translații. Așadar, se va aplica transformarea afină doar punctelor de control, după care se va genera curba Bézier definită de acest nou poligon de control.

### 1. ALGORITMUL HORNER–BÉZIER DE EVALUARE A PARAMETRIZĂRII BERNSTEIN A UNEI CURBE BÉZIER

Considerăm poligonul de control  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  și fie

$$\begin{aligned} b(t) &= \sum_{i=0}^n b(i) \cdot B_i^n(t) = \\ &= C_n^0 s^n \cdot b_0 + C_n^1 s^{n-1} \cdot t \cdot b_1 + \dots + C_n^n t^n \cdot b_n \\ &= (C_n^0 s \cdot b_0 + C_n^1 t \cdot b_1) \cdot s^{n-1} + C_n^2 s^{n-2} \cdot t^2 \cdot b_2 + \dots + C_n^n t^n \cdot b_n \\ &= [(C_n^0 s \cdot b_0 + C_n^1 t \cdot b_1) \cdot s + C_n^2 s^{n-2} \cdot t^2 \cdot b_2] \cdot s^{n-2} + \dots + C_n^n t^n \cdot b_n \\ &= [\dots [(C_n^0 s \cdot b_0 + C_n^1 t \cdot b_1) \cdot s + C_n^2 s^{n-2} \cdot t^2 \cdot b_2] \cdot s + \dots] \cdot s + C_n^n t^n \cdot b_n \end{aligned}$$

unde  $s = 1 - t$ .

Această metodă de eșalonare a operațiilor, pentru evaluarea lui  $b(t)$  se numește metoda Horner–Bézier. Pentru calculul combinărilor vom folosi relația:

$$C_n^i = C_n^{i-1} \cdot (n - i + 1) / i$$

#### Algoritmul Horner–Bézier:

combin  $\longrightarrow$  combinări:  $C_n^i$   
 b[i]  $\longrightarrow$  punctul de control  $b_i$   
 t  $\longrightarrow$  parametrul  
 punct =  $b(t)$   
 grad  $\longrightarrow$  gradul curbei

```
s = 1 - t;   fact=1;           /* fact = t^k */
combin = 1;   /* inițializarea C_n^0 = 1 */
punct = b[0] * s;
for(i=1; i < grad; i++)
{
  fact * = t;
  combin = combin * (grad-i+1) / i;
  punct = (punct + fact * combin * b[i]) * s;
}
punct += fact * t * b[grad];
```

### 2. REPREZENTAREA PROCEDURALĂ A CURBELOR BÉZIER. ALGORITMUL LUI DE CASTELJAU

De Casteljaou a dat o altă definiție a curbelor Bézier. Lucrările sale privind această problemă au fost elaborate înaintea celor ale lui Bézier, dar nu au fost niciodată publicate, ci au fost păstrate sub forma unor rapoarte tehnice ale firmei Citroën. Rapoartele au devenit cunoscute mult mai târziu, când metoda dată de Bézier devenise deja uzuală. Astfel aceste curbe poartă doar numele lui Bézier. Pentru a deduce schema lui de Casteljaou de generare a

unui punct pe o curbă Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  definim operatorul (cf. de ex. [?])

$$E : \{b_0, \dots, b_n\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_n\}, \quad E(b_i) = b_{i+1},$$

și scriem  $b(t) = ((1-t) \cdot I + t \cdot E)^n \cdot b_0$ . Notăm:

$$b_{r,r+1,\dots,s}(t) = ((1-t) + t \cdot E)^{s-r} b_r.$$

Avem forma recursivă:

$$\begin{aligned} \underline{b_{r,\dots,s}(t)} &= (1-t+t \cdot E) \cdot (1-t+t \cdot E)^{s-r-1} \cdot b_r \\ &= (1-t) \cdot b_{r,\dots,s-1} + t \cdot E \cdot (1-t+t \cdot E)^{s-r-1} \cdot b_r \\ &= (1-t) \cdot b_{r,\dots,s-1} + t \cdot (1-t+t \cdot E)^{s-r-1} \cdot b_r \\ &= \underline{(1-t) \cdot b_{r,\dots,s-1} + t \cdot b_{r+1,\dots,s}}. \end{aligned}$$

În cazul când  $s = r + 1$  avem:

$$b_{rs}(t) = (1-t) \cdot b_r + t \cdot b_s \quad (b_r(t) = b_r \text{ pentru } r = s)$$

iar pentru  $r = 0, s = n$  avem:

$$b_{0,1,\dots,n}(t) = (1-t+t \cdot E)^{n-0} \cdot b_0 = b(t).$$

Rezultă următoarea schemă de evaluare a unui punct de pe curba Bézier, corespunzător parametrului  $t$ :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & b_0 \\ & & & & & & b_1 & b_{0,1} \\ & & & & & & b_2 & b_{1,2} & b_{0,1,2} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & b_{n-1} & b_{n-2,n-1} & b_{n-3,n-2,n-1} & \dots & b_{0,1,\dots,n-1} \\ & & & & & & b_n & b_{n-1,n} & b_{n-2,n-1,n} & \dots & b_{1,2,\dots,n} & b_{0,1,\dots,n} \end{array}$$

Fiecare punct din matricea triunghiulară se obține ca o combinație convexă, cu coeficienții  $(1-t)$ ,  $t$  a două puncte situate pe coloana precedentă și pe aceeași linie, respectiv linia de deasupra, i.e. de exemplu:

$$b_{i,i+1,i+2} = (1-t) \cdot b_{i,i+1} + t \cdot b_{i+1,i+2}.$$

Dacă se reindexează punctele din matricea de mai sus, și anume:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & b_0^0 \\ & & & & & & b_1^0 & b_0^1 \\ & & & & & & b_2^0 & b_1^1 & b_0^2 \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & b_{n-1}^0 & b_{n-2}^1 & b_{n-3}^2 & \dots & b_0^{n-1} \\ & & & & & & b_n^0 & b_{n-1}^1 & b_{n-2}^2 & \dots & b_1^{n-1} & b_0^n \end{array}$$

avem următoarea relație recursivă:

$$b_j^r(t) = (1-t) \cdot b_j^{r-1}(t) + t \cdot b_{j+1}^{r-1}(t) \quad \text{cu} \quad r = \overline{1, n}, j = \overline{0, n-r}.$$

Pentru a schița algoritmul de calcul facem următoarele notații:

bez[i]  $\longrightarrow$  punctul de control  $b_i$

t  $\longrightarrow$  parametrul

punct  $\longrightarrow$  b(t)

```

grad → gradul curbei
Avem astfel următorul algoritm:
for(i=0; i <= grad; i++)
    bezaux[i] = bez[i];
s = 1-t;
for(r=1; r <= grad; r++)
    for(i=0; i <= (grad-r); i++)
        bezaux[i] = s * bezaux[i] + t * bezaux[i+1];
punct = bezaux[0];

```

**2.1. Interpretarea geometrică a algoritmului de Casteljau.** Fie  $b_i$ ,  $i = \overline{0,3}$  patru puncte (de control). Pentru fiecare  $t \in [0, 1]$  definim:

$$\begin{cases} b_0^1(t) = (1-t) \cdot b_0 + t \cdot b_1 \\ b_1^1(t) = (1-t) \cdot b_1 + t \cdot b_2 \\ b_2^1(t) = (1-t) \cdot b_2 + t \cdot b_3. \end{cases}$$

Prin urmare, în prima etapă a schemei de Casteljau se realizează interpolarea afină a punctelor de control succesive. Pentru  $t$  fixat, punctele  $b_0^1(t), b_1^1(t), b_2^1(t)$  împart segmentele corespunzătoare în același raport  $\frac{t}{1-t}$  (vezi figura).

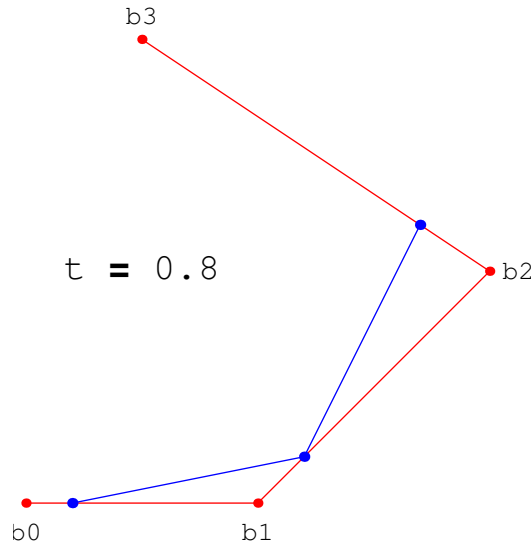


FIGURE 2. Algoritmul lui *de Casteljau*

În etapa următoare se interpolează aceste puncte și se obțin:

$$\begin{cases} b_0^2(t) = (1-t) \cdot b_0^1(t) + t \cdot b_1^1(t) \\ b_1^2(t) = (1-t) \cdot b_1^1(t) + t \cdot b_2^1(t). \end{cases}$$

În fine

$$b_0^3(t) = (1-t) \cdot b_0^2(t) + t \cdot b_1^2(t).$$

Să facem calculele:

$$\begin{aligned}
b_0^2(t) &= (1-t) \cdot [(1-t) \cdot b_0 + t \cdot b_1] + t \cdot [(1-t) \cdot b_1 + t \cdot b_2] \\
&= (1-t)^2 \cdot b_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot b_1 + t^2 \cdot b_2 \\
b_1^2(t) &= (1-t) \cdot [(1-t) \cdot b_1 + t \cdot b_2] + t \cdot [(1-t) \cdot b_2 + t \cdot b_3] \\
&= (1-t)^2 \cdot b_1 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot b_2 + t^2 \cdot b_3 \\
b_0^3 &= (1-t)^3 \cdot b_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t)^2 \cdot b_1 + (1-t)^2 \cdot t^2 \cdot b_2 \\
&\quad + t \cdot (1-t)^2 \cdot b_1 + 2 \cdot t^2 \cdot (1-t) \cdot b_2 + t^3 \cdot b_3 = \\
&= (1-t)^3 \cdot b_0 + 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 \cdot b_1 + 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) \cdot b_2 + t^3 \cdot b_3
\end{aligned}$$

adică parametrizarea Bézier a unei curbe cubice.

**Observație:** (cf. e.g. [?]) Considerăm curba Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, \dots, b_n)$ . Atunci punctele  $b_0^{n-2}(t)$ ,  $b_1^{n-2}(t)$  și  $b_2^{n-2}(t)$  evaluate în etapa  $n-2$  a schemei de Casteljau determină planul osculator al curbei în punctul  $b(t)$  (aceasta în cazul în care curba este definită în spațiu). Numărul operațiilor în evaluarea unui punct pe o curbă Bézier de gradul  $n$  este liniar în  $n$  în cazul algoritmului Horner-Bézier, și respectiv pătratic, în cazul algoritmului de Casteljau. Totuși este de preferat algoritmul de Casteljau, fiind numeric mai stabil și furnizând în etapa  $n-1$  și direcția tangentei în punctul evaluat.

### 3. RELAȚII ÎNTRE POLIGONUL DE CONTROL ȘI FORMA CURBEI BÉZIER ASOCIATE

Curbele Bézier au fost introduse în ideea de a genera curbe care se apropie de forma poligonului de control. Pentru a reproduce forma unei curbe se consideră un poligon de control și apoi se generează curba Bézier asociată. Dacă forma obținută este necorespunzătoare, se ajustează punctele de control până ce obținem forma curbei cât mai apropiată de cea desenată liber. Modificarea adecvată a unor puncte ale poligonului inițial necesită cunoașterea modului în care o anumită schimbare în poziția punctelor de control influențează geometria curbei.

Fie  $b(t)$  curba Bézier definită de poligonul

$$(b_0, b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_n)$$

și  $\tilde{b}(t)$  curba Bézier definită de poligonul

$$(b_0, b_1, \dots, b_{j-1}, c_j, b_{j+1}, \dots, b_n).$$

Avem:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(t) &= \sum_{i=0, i \neq j}^n b(i) \cdot B_i^n(t) + c_j \cdot B_j^n(t) = \\
&= \sum_{i=0}^n b(i) \cdot B_i^n(t) + (c_j - b_j) \cdot B_j^n(t) = \\
&= b(t) + \overrightarrow{b_j c_j} \cdot B_j^n(t)
\end{aligned}$$

Rezultă că  $\tilde{b}(t) - b(t) = B_j^n(t) \cdot \overrightarrow{b_j c_j}$ .

Pentru  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  polinoamele Bernstein  $B_j^n$  se anulează doar în 0 și 1, astfel curba  $\tilde{b}$  se deplasează pe direcția lui  $\overrightarrow{b_j c_j}$  cu excepția extremităților  $b_0$  și  $b_n$ . Cum maximul funcției

$B_j^n$  este atins pentru  $t = \frac{j}{n}$  rezultă că, înlocuind punctul de control  $b_j$  cu  $c_j$  curba este cel mai mult afectată într-o vecinătate a punctului  $b(\frac{j}{n})$ .

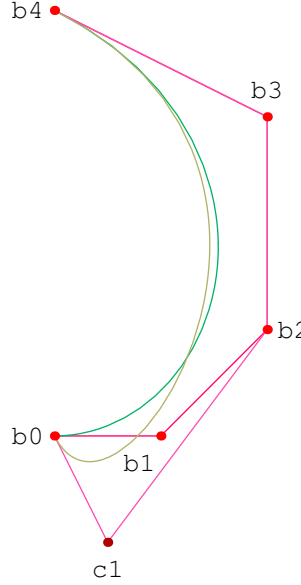


FIGURE 3. Modificarea formei unui arc Bézier când se schimbă un punct de control

Posibilitățile de control a formei curbei Bézier, precum și stabilitatea numerică a algoritmului de Casteljan fac ca acestea să constituie standardul geometric ideal pentru reprezentarea curbelor polinomiale pe porțiuni.

#### 4. SUBDIVIZAREA UNEI CURBE BÉZIER

Fie  $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  curba Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ , și exprimată în baza Bernstein. Fie de asemenea  $\alpha \in (0, 1)$  fixat. Considerăm arcele  $\gamma_1 = b|_{[0, \alpha]}$  și  $\gamma_2 = b|_{[\alpha, 1]}$  (care admit parametrizări de grad  $n$ , fiind restricții ale lui  $b$ ). Ne punem problema găsirii punctelor de control care definesc aceste arce ca și curbe Bézier. Procesul prin care se asociază curbei Bézier două arce Bézier adiacente și a căror reuniune este curba inițială se numește *proces de subdivizare*.

Dacă  $b$  este o curbă Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  și  $\alpha \in (0, 1)$  ca mai sus atunci:

– poligonul de control asociat arcului  $b|_{[0, \alpha]}$  este:

$$(b_0^0(\alpha), b_0^1(\alpha), \dots, b_0^n(\alpha));$$

– poligonul de control asociat arcului  $b|_{[\alpha, 1]}$  este:

$$(b_n^0(\alpha), b_{n-1}^1(\alpha), \dots, b_0^n(\alpha));$$

punctele care intervin fiind generate de schema de Casteljan.

Ideea de demonstrație a acestei afirmații în ceea ce privește  $b|_{[0, \alpha]}$  constă în a face schimbarea de parametru  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \alpha]$ ;  $\phi(\tau) = \alpha \cdot \tau$  și de a utiliza relația :

$$B_i^n(\alpha \cdot \tau) = \sum_{j=0}^n B_i^j(\alpha) \cdot B_j^n(\tau)$$

Pentru celălalt arc  $b|_{[\alpha,1]}$  se va ține cont de invarianța curbei Bézier la schimbarea ordinii punctelor de control, deci se va considera  $\tilde{b}(t) = b(1-t)$ . Avem astfel arcul  $\tilde{b}|_{[0,1-\alpha]}$  (vezi de ex. [EP]).

Descriem mai jos procedura de subdivizare (aceasta va determina poligoanele de control de subdiviziune în punctul corespunzător lui  $\alpha$ ).

Fie variabilele *grad*, *i* și *r* de tip *int* iar *alfa* și *beta* de tip *double*. Corpul funcției de subdivizare poate fi scris astfel:

```
{
    /* subpoligonul stang */
    beta = 1 - alfa;
    for(i = 0; i <= grad; i++)
        pstg[i] = b[i];
    for (r = 1; r <= grad; r++)
        for (i = 0; i <= grad - r; i++)
            pstg[i] = beta * pstg[i] + alfa * pstg[i+1];
    /* subpoligonul drept */

    alfa = 1 - alfa;
    beta = 1 - beta;
    for (i = 0; i <= grad; i++)
        pdr[grad-i] = b[i];
    for (r = 1; r <= grad; r++)
        for (i = 0; i <= grad - r; i++)
            pdr[i] = beta * pdr[i] + alfa * pdr[i+1];
}
```

Vom observa și în figura următoare că procesul de subdivizare este controlat de schema de Casteljau și valoarea lui  $\alpha$ .

**4.1. Mărirea gradului parametrizării unei cubei Bézier.** Să considerăm curba Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, \dots, b_n)$ . Se pune problema dacă această curbă poate fi generată de  $n+2$  puncte de control, adică dacă se poate reparametriza curba printr-un polinom de grad mai mare ca  $n$ .

**Propoziție.** Curba Bézier definită de poligonul de control  $(b_0, \dots, b_n)$  și curba Bézier asociată poligonului  $(c_0, \dots, c_n, c_{n+1})$ , unde

$$c_0 = b_0 \quad , \quad c_{n+1} = b_n$$

$$c_i = \frac{i}{n+1} \cdot b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \cdot b_i \quad , \quad i = \overline{1, n}$$

coincide.

Creșterea gradului parametrizării unei curbe Bézier este utilă de exemplu în generarea suprafețelor (toate curbele care intervin trebuie să aibă același grad).

## 5. RACORDUL DE CLASĂ $C^1$ ȘI $C^2$ A DOUĂ ARCE BÉZIER

Curbele Bézier deși utile în desenul liber prezintă câteva dezavantaje și anume, dacă curba ce trebuie modelată are formă complexă, atunci reprezentarea ei Bézier necesită multe puncte



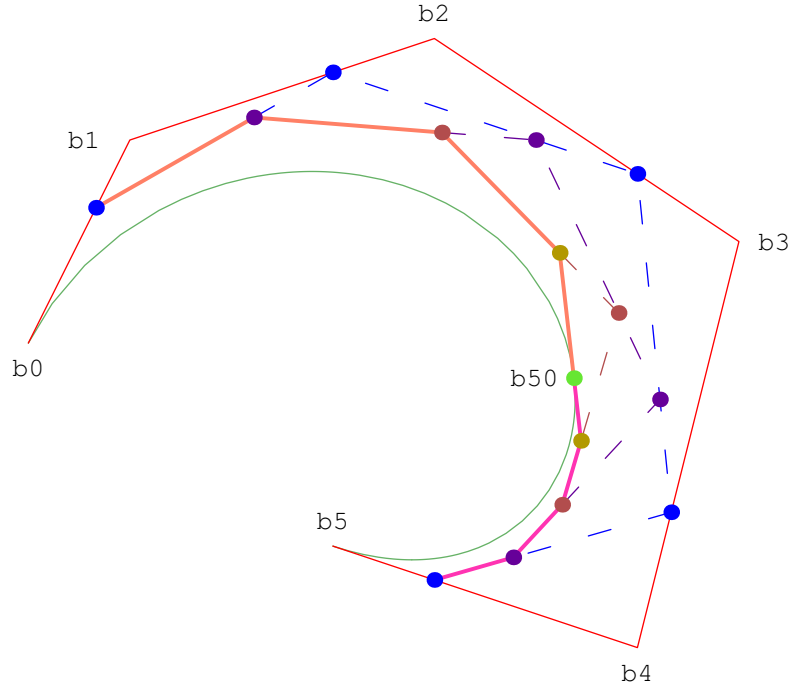


FIGURE 4. Subdivizarea unei curbe Bézier de grad 5  
în punctul corespunzător parametrului  $\alpha = \frac{2}{3}$

de control și deci va avea grad mai mare. Cu cât gradul crește, sunt implicate mai multe operații în evaluarea parametrizării și deci din rotunjiri succesive se amplifică erorile. Pentru a evita lucrul cu parametrizări de grad mare ( $> 10$ ) se fac modelări folosind *curbe Bézier compozite*.

O curbă Bézier compozită este o curbă  $\Gamma$  obținută prin racordarea mai multor arce Bézier de același grad. Mai precis să presupunem că avem  $L$  arce Bézier de grad  $n$ , definite respectiv de poligoanele de control

$$(b_{in}, b_{in+1}, \dots, b_{in+n}), \quad i = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Ultimul punct de control al fiecărui poligon coincide cu primul punct de control al poligonului următor. Cum o curbă Bézier interpolează extremitățile poligonului de control, rezultă că reuniunea celor  $L$  arce definește o curbă continuă.

Pe fiecare arc avem parametrizarea Bernstein

$$r_{i+1} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad r_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^n b_{in+j} \cdot B_j^n(t), \quad i = 0, 1, \dots, L - 1$$

(problema se pune și are soluție și în  $\mathbb{R}^3$ ).

Căutăm o parametrizare globală a curbei  $\Gamma$ .

Fie  $[u_0, u_L]$  un interval arbitrar. Considerăm divizarea  $u_0 < u_1 < \dots < u_L$  și schimbările afine de parametru

$$\phi_i : [u_{i-1}, u_i] \longrightarrow [0, 1], \quad \phi_i(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}.$$

Astfel, putem defini o parametrizare globală a funcției Bézier compozite:

$$r : [u_0, u_L] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u) = (r_i \circ \phi_i)(u), \quad \forall u \in [u_{i-1}, u_i], i = 1, \dots, L.$$

Evident  $r$  este continuă și  $r(u_i) = b_{ni}$ ,  $i = 0, \dots, L$ . Șirul punctelor de diviziune ale intervalului  $[u_0, u_L]$  se numește *șir de noduri*, punctele  $r(u_i)$  se numesc *puncte de joncțiune sau de racord*.

Notăm  $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ ,  $i = 0, \dots, L - 1$ .

Parametrul  $u$  este parametrul global al curbei compozite iar  $t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}$  este parametrul local pentru parametrizarea Bernstein a arcului  $r([u_i, u_{i+1}])$ .

În continuare vom deduce relațiile între punctele de control a două arce adiacente pentru ca  $\Gamma$  să fie de clasă  $C^1$  în fiecare nod  $u_i = 1, 2, \dots, L - 1$ . Ne restrângem la cazul a două arce Bézier și considerăm  $r : [u_0, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  curba Bézier compozită. Avem  $u_0 < u_1 < u_2$  iar poligoanele de control pe cele două porțiuni sunt  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ , respectiv  $(b_n, b_{n+1}, \dots, b_{2n})$ . Atunci  $\Gamma$  este de clasă  $C^1$  în  $u_1$  dacă și numai dacă punctele  $b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$  sunt coliniare și

$$b_n = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} \cdot b_{n-1} + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} \cdot b_{n+1} \quad .$$

Să arătăm acest lucru:

$$\text{Avem } r(u) = \begin{cases} r_1(\varphi_1(u)) & \text{pentru } u \in [u_0, u_1] \\ r_2(\varphi_2(u)) & \text{pentru } u \in [u_1, u_2] \end{cases} .$$

Atunci  $r$  este de clasă  $C^1$  în  $u_1$  dacă și numai dacă vectorii tangenți la arcele  $r([u_0, u_1])$ ,  $r([u_1, u_2])$  în punctul  $r(u_1)$  coincid. Astfel,

$$\frac{d}{dt} r_1(\varphi_1(u_1)) \cdot \varphi_1'(u_1) = \frac{d}{dt} r_2(\varphi_2(u_1)) \cdot \varphi_2'(u_1) \quad .$$

Dar  $\varphi_1(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0}$ ,  $\varphi_2(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}$  și prin urmare condiția este echivalentă cu

$$\frac{d}{dt} r_1(1) \cdot \frac{1}{u_1 - u_0} = \frac{d}{dt} r_2(0) \cdot \frac{1}{u_2 - u_1} \quad .$$

Pe de altă parte,  $r_1(t) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot B_j^n(t)$  și  $r_2(t) = \sum_{j=0}^n b_{n+j} \cdot B_j^n(t)$ .

Știm că  $B_j^n(t) = C_n^j t^j \cdot (1 - t)^{n-j}$  și dorim să calculăm  $B_j^{n'}(0)$ , respectiv  $B_j^{n'}(1)$ . Avem:

- $B_0^n(t) = C_n^0 (1 - t)^n \longrightarrow B_0^{n'}(t) = -n \cdot (1 - t)^{n-1} \longrightarrow \begin{cases} B_0^{n'}(0) = -n \\ B_0^{n'}(1) = 0 \end{cases}$
- $B_1^n(t) = C_n^1 t (1 - t)^{n-1} \longrightarrow B_1^{n'}(t) = C_n^1 [(1 - t)^{n-1} - (n - 1)t(1 - t)^{n-2}] \longrightarrow \begin{cases} B_1^{n'}(0) = n \\ B_1^{n'}(1) = 0 \end{cases}$
- pentru  $j \geq 2$  și  $j < n - 1$ :  $B_j^n(t) = C_n^j t^j (1 - t)^{n-j} \longrightarrow \begin{aligned} &\longrightarrow B_j^{n'}(t) = C_n^j [j \cdot t^{j-1} (1 - t)^{n-j} - (n - j)t^j (1 - t)^{n-j-1}] \longrightarrow \end{aligned}$

$$\longrightarrow \begin{cases} B_j^{n'}(0) = 0 \\ B_j^{n'}(1) = 0 \end{cases}$$

- $B_{n-1}^n(t) = C_n^{n-1} t^{n-1} (1-t) \longrightarrow B_{n-1}^{n'}(t) = C_n^{n-1} [(n-1)t^{n-2}(1-t) - t^{n-1}]$   
 $\longrightarrow \begin{cases} B_{n-1}^{n'}(0) = 0 \\ B_{n-1}^{n'}(1) = n \end{cases}$
- $B_n^n(t) = C_n^n t^n \longrightarrow B_n^{n'}(t) = n t^{n-1} \longrightarrow \begin{cases} B_n^{n'}(0) = 0 \\ B_n^{n'}(1) = n \end{cases}$ .

Rezultă astfel că:

$$\frac{d}{dt} r_1(1) = n(b_n - b_{n-1}), \quad \frac{d}{dt} r_2(0) = n(b_{n+1} - b_n).$$

Prin urmare avem:

$$\frac{n(b_n - b_{n-1})}{\Delta_0} = \frac{n(b_{n+1} - b_n)}{\Delta_1} \iff \Delta_1 b_n - \Delta_1 b_{n-1} = \Delta_0 b_{n+1} - \Delta_0 b_n$$

$$\iff (\Delta_0 + \Delta_1 b_n) = \Delta_0 b_{n+1} + \Delta_1 b_{n+1}$$

$$\iff b_n = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} b_{n+1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} b_{n-1}$$

Să deducem acum condiția de clasă  $C^2$ .

Calculăm limitele laterale ale derivatei de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} \text{Derivata la stânga} &= \frac{d^2}{dt^2} r_2(\varphi_1(u_1)) \cdot (\varphi'(u_1))^2 + \frac{d}{dt} (r_1)(\varphi_1(u_1)) \cdot \underbrace{\varphi''(u_1)}_{=0} \\ & \hspace{15em} (\varphi_1 \text{ fiind de grad } 1) \\ &= \frac{d^2 r_1}{dt^2} (1) \cdot \frac{1}{(u_1 - u_0)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Analog, derivata la dreapta} = \frac{d^2 r_2}{dt^2} (0) \cdot \frac{1}{(u_2 - u_1)^2}.$$

Avem următoarele expresii pentru derivatele de ordinul al doilea ale polinoamelor Bernstein:

- $B_0^{n''}(t) = n(n-1)(1-t)^{n-2} \longrightarrow \begin{cases} B_0^{n''}(0) = n(n-1) \\ B_0^{n''}(1) = 0 \end{cases}$
- $B_1^{n''}(t) = C_n^1 [-2(n-1)(1-t)^{n-2} + (n-1)(n-2)t(1-t)^{n-3}] \longrightarrow$   
 $\longrightarrow \begin{cases} B_1^{n''}(0) = -2n(n-1) \\ B_1^{n''}(1) = 0 \end{cases}$
- $B_2^{n''}(t) = C_n^2 [2(1-t)^{n-2} - 2(n-2)t(1-t)^{n-3} + -2(n-2)t(1-t)^{n-3} +$   
 $+ (n-2)(n-3)t^2(1-t)^{n-4}] \longrightarrow \begin{cases} B_2^{n''}(0) = n(n-1) \\ B_2^{n''}(1) = 0 \end{cases}$
- pentru  $j > 2$  și  $j < n-2 \longrightarrow \begin{cases} B_j^{n''}(0) = 0 \\ B_j^{n''}(1) = 0 \end{cases}$

Mai avem de asemenea:

- $\begin{cases} B_{n-2}^{n''}(0) = 0 \\ B_{n-2}^{n''}(1) = n \cdot (n-1) \end{cases}$
- $\begin{cases} B_{n-1}^{n''}(0) = 0 \\ B_{n-1}^{n''}(1) = -2n \cdot (n-1) \end{cases}$

$$\bullet \begin{cases} B_n''(0) = 0 \\ B_n''(1) = n \cdot (n-1) . \end{cases}$$

Așadar, condiția ca  $r$  să fie de clasă  $C^2$  în  $u_1$  se rescrie în forma:

$$\frac{1}{\Delta_0^2} (b_{n-2} - 2b_{n-1} + b_n) = \frac{1}{\Delta_1^2} (b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2}) .$$

Întrucât  $r$  este de clasă  $C^1$  în  $u_1$  avem condiția:

$$b_n = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} \cdot b_{n-1} + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} \cdot b_{n+1}$$

Înlocuind, avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0^2} (b_{n-2} - 2b_{n-1} + \alpha b_{n-1} + (1-\alpha)b_{n+1}) &= \\ &= \frac{1}{\Delta_1^2} (\alpha b_{n-1} + (1-\alpha)b_{n+1} - 2b_{n+1} + b_{n-2}) \end{aligned}$$

unde  $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}$ . Astfel  $\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ . Avem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0^2} \cdot b_{n-2} + \left[ \frac{1}{\Delta_0^2} \cdot (\alpha - 2) - \frac{1}{\Delta_1^2} \cdot \alpha \right] \cdot b_{n-1} &= \\ = \frac{1}{\Delta_1^2} \cdot b_{n+2} + \left[ -\frac{(\alpha+1)}{\Delta_1^2} + \frac{\alpha-1}{\Delta_0^2} \right] \cdot b_{n+1} & \quad | \cdot \Delta_1^2 \longrightarrow \\ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 b_{n-2} + \left( \frac{(\alpha-2) \cdot \alpha^2}{(1-\alpha)^2} - \alpha \right) b_{n-1} = b_{n+2} + \left( -\alpha - 1 + \frac{(\alpha-1)\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \right) \cdot b_{n+1} \\ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 b_{n-2} + \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 1 + 2\alpha - \alpha^2}{(1-\alpha^2)} \cdot \alpha b_{n-1} = b_{n+2} + \frac{1-\alpha^2 + \alpha^2}{\alpha-1} \cdot b_{n+1} & \quad | : \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \\ \longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} b_{n-2} + \frac{-1}{\alpha-1} b_{n-1} = \frac{\alpha-1}{\alpha} b_{n+2} + \frac{1}{\alpha} b_{n+1} . \end{aligned}$$

Am obținut combinații afine de  $b_{n-1}, b_{n-2}$  respectiv  $b_{n+1}, b_{n+2}$ . Notăm  $\mathbf{d}$  punctul de intersecție a dreptelor  $b_{n-1}b_{n-2}$  cu  $b_{n+1}b_{n+2}$ .

Avem

$$(*) \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot b_{n-2} + \frac{-1}{\alpha-1} \cdot b_{n-1} = \mathbf{d} & \iff b_{n-1} = \alpha \cdot b_{n-2} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{d} \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot b_{n+2} + \frac{1}{\alpha} \cdot b_{n+1} = \mathbf{d} & \iff b_{n+1} = \alpha \cdot \mathbf{d} + (1-\alpha) \cdot b_{n+2} . \end{cases}$$

Concluzionăm că:  $r$  este de clasă  $C^2$  în nodul de joncțiune  $u_1$  dacă și numai dacă există un punct  $\mathbf{d}$  astfel încât punctele din tripletele  $(b_{n-2}, b_{n-1}, \mathbf{d})$  și  $(\mathbf{d}, b_{n+1}, b_{n+2})$  să fie coliniare și, în plus, să avem relația (\*).

Punctul  $\mathbf{d}$  asociat racordului de clasă  $C^2$  a două arce Bézier se numește *punct de Boor*.