INTERPOLARE

Se dau punctele P_0, P_1, ..., P_n in plan sau in spatiu, numite **noduri** si avand vectorii de pozitie $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, ..., $\vec{r}_n$.

Problemă. Să se găsească o curbă (dintr-o anumită familie) care să treacă prin punctele date in ordinea precizată.

Observaţie. Evident că se preferă curbe cât mai simple şi având proprietăţi cât mai bune. Un bun candidat este clasa funcţiilor polinomiale. **De ce?**

Polinoame Lagrange.

Fie $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$. Un polinom (funcţie polinomială) de grad arbitrar k se scrie

$$L(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k.$$

Condiţia de interpolare se scrie

$$L(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Prin urmare alegem $k = n$ şi astfel obţinem un sistem de $(n+1)$ ecuaţii liniare cu $n+1$ necunoscute (coeficienţii polinomului).

Se obţine soluţie unică. (Avem un sistem Cramer, determinantul este de tip Vandermonde.)

Acest polinom se numeşte polinomul Lagrange corespunzător problemei propuse.

Definim polinoamele Lagrange de bază prin condiţiile

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Prin urmare putem scrie

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$

Se arată că

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\ . \tag{3}$$

Inconveniente:

- gradul devine foarte mare pentru un număr mare de puncte;
- precizia poate fi mica, aparând oscilaţii mari faţă de funcţia iniţială care trebuie aproximată);

- modificarea unei coordonate intr-un nod (datorată unei măsurători greşite, de exemplu) are ca efect modificarea globală a polinomului; (nu pot face o "reparaţie locală").

Exerciţiu. Să se studieze interpolarea Lagrange pentru $n \geq 3$ puncte coliniare.

Idee de demonstraţie: Se demonstrează următoarele identităţi:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1, \quad \sum_{i=0}^{n} x_i L_i(x) = x,$$

pentru orice x.

Problema gradului mare al polinomului Lagrange ar putea fi rezolvată reconsiderând problema interpolării pe porţiuni; secvenţa de noduri se divide in sub-secvenţe mai mici şi se consideră polinoamele Lagrange pe aceste sub-secvenţe. Apare însă o altă problemă şi anume cea a racordării arcelor succesive in punctele de joncţiune.

De exemplu, se dau nodurile P_0, ..., P_6.
Se consideră sub-secvenţele:
(I) P_0, P_1, P_2, P_3 care conduce la polinomul $L(x)$, de grad 3;
(II) P_3, P_4, P_5, P_6 care conduce la polinomul $\bar{L}(x)$, de grad 3.

Evident avem racordare (i.e. continuitate) deoarece $L(x_3) = y_3 = \bar{L}(x_3)$.

Totuşi, un calcul simplu ne arată că nu avem diferenţiabilitate nici măcar de clasă C^1 in x_3.

Interpolare Hermite.

Pentru a avea control şi asupra valorilor derivatelor (d.p.d.v. cinematic controlăm vitezele) pornim cu cele $(n+1)$ puncte (noduri) insă precizăm şi valorile vitezelor (adică a derivatelor) în punctele corespunzătoare. Cu alte cuvinte considerăm datele iniţiale

$$P_0(x_0, y_0; v_0), P_1(x_1, y_1; v_1), \ldots, P_0(x_n, y_n; v_n).$$

Scopul este de a găsi funcţii polinomiale H cu proprietăţile

$$H(x_i) = y_i, \quad H'(x_i) = v_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Întrucât avem $2(n+1)$ condiţii, polinomul H are gradul $2n+1$.

Observaţie: Se rezolvă astfel problema racordării (avem diferenţiabilitate şi în punctele de joncţiune) însă gradul s-a mărit considerabil.

La fel ca în cazul interpolării Lagrange, determinăm polinoamele Hermite de bază, notate cu H_i şi $\bar{H}_i$, $i = 0, \ldots, n$ caracterizate de condiţiile

$$H_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad H_i'(x_j) = 0, \quad \bar{H}_i(x_j) = 0, \quad \bar{H}_i'(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

Polinomul de interpolare Hermite este determinat de relaţia

$$H(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} v_i \bar{H}_i(x). \tag{5}$$

Să analizăm ecuaţiile (3): Fixăm i.

Pentru $j \neq i$ avem $H_i(x_j) = 0$ şi $H_i'(x_j) = 0$.
Prin urmare $(x - x_j)^2$ divide $H_i(x)$ pentru orice $j \neq i$.
Rezultă că

$$\prod_{j \neq i} (x - x_j)^2 \text{ divide } H_i(x).$$

Dar polinomul $\prod_{j \neq i} (x - x_j)$ este, până la o constantă multiplicativă, polinomul Lagrange de bază $L_i(x)$.
Prin urmare

$$H_i(x) = (\textit{polinom de grad } 1)\ L_i^2(x), \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Analog se arată că

$$\bar{H}_i(x) = (\textit{polinom de grad } 1)\ L_i^2(x), \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Obţinem imediat că

$$\begin{cases} H_i(x) = [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)]\, L_i^2(x) \\ \bar{H}_i(x) = (x - x_i) L_i^2(x), \qquad\qquad i = 0, \ldots, n. \end{cases} \tag{6}$$

Pentru $n = 1$ avem:

$H_0(x) = \frac{(3x_0 - x_1 - 2x)(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^3}$

$H_1(x) = \frac{(3x_1 - x_0 - 2x)(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^3}$

$\bar{H}_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}$

$\bar{H}_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$

Problemă: **(a)** Fie funcţia $f : [1, 9] \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Să se reprezinte grafic funcţia f. **(b)** Se consideră apoi valorile: $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $v_0 = 1/2$, $v_1 = 1/4$ şi $v_2 = 1/6$. Să se determine polinomul de interpolare Hermite ($n = 2$) pentru valorile considerate. Să se reprezinte în acelaşi sistem de coordonate funcţia polinomială corespunzătoare. **(c)** Pe intervalele $[x_0, x_1]$, respectiv $[x_1, x_2]$ să se determine polinoamele Hermite ($n = 1$) şi să se reprezinte grafic funcţiile polinomiale corespunzătoare. Să se compare cele trei grafice.

Curbe parametrizate Ferguson

Să considerăm următoarea problemă: Fie P_0 şi P_1 două puncte în plan sau în spaţiu. Fie $\vec{r}_0$ şi $\vec{r}_1$ vectorii de poziţie respectiv ai celor două puncte, iar $\vec{v}_0$ şi $\vec{v}_1$ vectorii vitezelor în punctele iniţial, respectiv final (vectorii tangenţi în capete). Să se determine o curbă polinomială de gradul al treilea (cubică)

$$r : [0,1] \to \mathbb{E}^2 \quad \text{sau} \quad \mathbb{E}^3,$$

care verifică

$$r(0) = \vec{r}_0, r(1) = \vec{r}_1, \frac{dr}{du}(0) = \vec{v}_0, \frac{dr}{du}(1) = \vec{v}_1.$$

Curba r, dacă există, are expresia

$$r(u) = a + 0 + u\ a_1 + u^2 a_2 + u^3 a_3, \quad u \in [0,1],$$

unde a_0, a_1, a_2 şi a_3 sunt vectori constanţi.

Condiţiile solicitate pentru r se rescriu:

$$\begin{aligned} a_0 &= \vec{r}_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= \vec{r}_1 \\ a_1 &= \vec{v}_0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= \vec{v}_1. \end{aligned}$$

Deducem imediat că

$$r(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\vec{r}_0 + (3u^2 - 2u^3)\vec{r}_1 + (u - 2u^2 + u^3)\vec{v}_0 + (u^3 - u^2)\vec{v}_1.$$

Să observăm polinoamele Hermite de bază pentru $n = 1$, $u_0 = 0$ şi $u_1 = 1$.

Mai precis avem

$$r(u) = H_0(u)\vec{r}_0 + H_1(u)\vec{r}_1 + \bar{H}_0(u)\vec{v}_0 + \bar{H}_1(u)\vec{v}_1.$$

Observaţie: Faptul că am considerat drept mulţime de definiţie a curbei r intervalul $[0,1]$ nu reprezintă o restrângere a generalităţii. Reamintim că avem întotdeauna o bijecţie afină de la un interval oarecare $[a,b]$ la intervalul $[0,1]$, dată de

$$\varphi : [a,b] \to [0,1], \quad \varphi(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad \varphi^{-1} : [0,1] \to [a,b], \quad \varphi^{-1}(u) = (1-u)a + u\ b.$$

Avem şi o scriere matricială pentru curba r, anume $r(u) = UCR$, unde

$$U = (1 \quad u \quad u^2 \quad u^3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix}.$$