CURBE BÉZIER

Am studiat problema aproximării graficului unei funcţii continue folosind interpolarea Lagrange, respectiv interpolarea Hermite şi am văzut că aceasta din urmă rezolvă destul de bine problema aproximării (clasă C^1). Rămâne totuşi o problemă nerezolvată, şi anume cea legată de controlul formei curbei. De exemplu, ce se intîmplă dacă mărimea vectorilor tangec ti în capete (vitezele) se modifică?

Aceste aspecte au fost studiate de inginerul (la Renault) francez Pierre Étiennes Bézier (1990-1999). Ideea sa a fost de a folosi poligoane de control. Apoi, Bézier a folosit polinoamele Bernstein (care erau cunoscute cu mult înainte) în locul bazei canonice pentru spaţiul polinoamelor.

Polinoame Bernstein (de grad n şi definite pe intervalul $[0,1]$)

$$b_k^n(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Evident, se obţin pornind de la identitatea $t+(1-t) = 1$, ridicând la puterea n şi dezvoltând folosind binomul lui Newton.

Proprietăţi ale polinoamelor Bernstein:

- sunt liniar independente, deci formează o bază în $\mathcal{P}_n$, spaţiul polinoamelor de grad cel mult n;

- $b_k^n(t) \geq 0$, pentru orice $t \in [0,1]$ şi orice $k = 0, 1, \ldots, n$;

- $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^n(t) = 1$, prin urmare pot fi considerate drept coeficienc ti pentru o combinaţie afină de puncte, chiar convexă (vezi proprietatea de mai sus);

- baza Bernstein poate fi generată şi recursiv:

  $$b_0^0(t) = 1; \quad b_k^{r+1}(t) = t\, b_{k-1}^r(t) + (1-t) b_k^r(t), \quad k = 0, \ldots, r+1$$

  cu convenţia $b_{-1}^r \equiv 0$ şi $b_{r+1}^r \equiv 0$.

Pentru un interval arbitrar $[a,b]$, polinoamele Bernstein se obţin analog, plecând de la dezvoltarea

$$\left[\frac{t-a}{b-a} + \frac{b-t}{b-a}\right]^n.$$

Exemple.

$n = 1$: $b_0^1(t) = 1 - t$, $b_1^1(t) = t$;

$n = 2$: $b_0^2(t) = (1-t)^2$, $b_1^2(t) = 2t(1-t)$, $b_2^2(t) = t^2$;

$n = 3$: $b_0^3(t) = (1-t)^3$, $b_1^3(t) = 3t(1-t)^2$, $b_2^3(t) = 3t^2(1-t)$, $b_3^3(t) = t^3$.

Alte proprietăţi:

- $\frac{d}{dt} b_k^n(t) = n\left[b_{k-1}^{n-1}(t) - b_k^{n-1}(t)\right], \quad k = 0, \ldots, n;$
- $\displaystyle \int b_k^n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{j=k+1}^{n+1} b_j^{n+1}(t) \quad (+\text{ constantă}).$

Prin *poligon de control* se înţelege o secvenţă (un şir ordonat) de $(n+1)$ puncte în plan (sau în spaţiu) $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Linia poligonală $p_0p_1\ldots p_n$ va determina forma curbei.

Curbe Bézier.

Dat un poligon de control $p_0p_1\ldots p_n$ în plan, vom considera curba parametrizată

$$r : [0,1] \to \mathbb{E}^2, \quad r = b(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(t)p_k,$$

(curbă polinomială de grad n). Aceasta se numeşte *curba Bézier* asociată poligonului de control $p_0p_1\ldots p_n$.

Proprietăţi.

(1) $b(0) = p_0$, $b(1) = p_n$; prin urmare curba Bézier interpolează capetele poligonului de control.
(2) $b'(0) = n(p_1 - p_0) \equiv n\ \overrightarrow{p_0p_1}$, $b'(1) = n(p_n - p_{n-1}) \equiv n\ \overrightarrow{p_{n-1}p_n}$; prin urmare curba Bézier este tangentă în capetele p_0 şi p_n la segmentele $[p_0p_1]$, respectiv $[p_{n-1}p_n]$.
(3) $b(t)$ se află situată în înfăşurătoarea convexă a punctelor care definesc poligonul de control.
(4) Pentru a avea o curbă închisă, este necesar şi suficient să avem $p_n = p_0$.
(5) Curba Bézier $\tilde{b}(t)$ corespunzătoare poligonului de control $p_np_{n-1}\ldots p_1p_0$ este strâns legată de curba $b(t)$, mai precis $\tilde{b}(t) = b(1-t)$; prin urmare imaginile geometrice ale celor două curbe coincid, însă acestea sunt parcurse în sensuri opuse.

Creşterea gradului unei curbe Bézier.

Problemă. Dat poligonul de control Bézier $p_0p_1\ldots p_n$ şi curba Bézier corespunzătoare $b(t)$. Să se determine un poligon de control $\tilde{p}_0\tilde{p}_1\ldots\tilde{p}_{n+1}$ care să conducă la aceeaşi curbă Bézier.

Să facem următorul calcul:

$$b_k^n(t) = b_k^n(t)[t + (1-t)] = t \cdot C_n^k t^k (1-t)^{n-k} + (1-t) \cdot C_n^k t^k (1-t)^{n-k} =$$
$$= \tfrac{k+1}{n+1}\, C_{n+1}^{k+1} t^{k+1} (1-t)^{n-k} + \tfrac{n+1-k}{n+1}\, C_{n+1}^{k} t^{k} (1-t)^{n+1-k} =$$
$$= \tfrac{k+1}{n+1}\, b_{k+1}^{n+1}(t) + \tfrac{n+1-k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t).$$

Astfel avem:

$$b(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) p_k = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{k+1}{n+1}\, b_{k+1}^{n+1}(t) + \frac{n+1-k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) \right] p_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1}\, b_{k+1}^{n+1}(t) p_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) p_k = \qquad \text{în prima sumă facem } k+1 \mapsto k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) p_{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) p_k = \qquad \text{termenii care lipsesc sunt } 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) p_{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n+1-k}{n+1}\, b_k^{n+1}(t) p_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} b_k^{n+1}(t) \left[\frac{k}{n+1}\, p_{k-1} + \frac{n+1-k}{n+1}\, p_k \right]$$

Se obţine un poligon cu $(n+2)$ puncte $\tilde{p}_0 \tilde{p}_1 \ldots \tilde{p}_{n+1}$, unde

$$\tilde{p}_0 = p_0,\ \tilde{p}_{n+1} = p_n,\ \tilde{p}_k = \frac{k}{n+1}\, p_{k-1} + \frac{n+1-k}{n+1}\, p_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Avem evident

$$b(t) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k^{n+1}(t) \tilde{p}_k.$$

Verificarea proprietăţii de tangenţă în capete:

$$\overrightarrow{\tilde{p}_0 \tilde{p}_1} = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_0 = \tfrac{n}{n+1}\, p_1 + \tfrac{1}{n+1}\, p_0 - p_0 = \tfrac{n}{n+1}\, \overrightarrow{p_0 p_1};$$
$$\overrightarrow{\tilde{p}_n \tilde{p}_{n+1}} = \tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n = p_n - \tfrac{1}{n+1}\, p_n - \tfrac{n}{n+1}\, p_{n-1} = \tfrac{n}{n+1}\, \overrightarrow{p_{n-1} p_n},$$

deci segmentele extreme sunt respectiv coliniare.

Exerciţiu. Să se descrie tehnica de mai sus pentru $n = 1$ şi pentru $n = 2$. Ce se observă?

Problemă. Cum se modifică forma curbei Bézier când modificăm un punct în poligonul de control?

Să considerăm poligonul de control $p_0p_1\dots p_n$ şi curba Bézier corespunzătoare $b(t)$. Dorim să analizăm cât de mult se modifică $b(t)$ când substituim punctul p_i cu punctul q_i.

Pentru aceasta, considerăm noua curbă Bézier $\bar{b}(t)$ şi calculăm diferenţa $\bar{b}(t) - b(t)$.

Avem

$$b(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k^n(t)p_k, \quad \bar{b}(t) = \sum_{k=0,k\neq i}^{n} b_k^n(t)p_k + b_i^n(t)q_i.$$

Rezultă că $\bar{b}(t) - b(t) = b_i^n(t)(q_i - p_i)$, adică

$$\overrightarrow{b(t)\bar{b}(t)} = b_i^n(t)\overrightarrow{p_iq_i}.$$

Prin urmare fiecare punct de pe curba b se deplasează în direcţia vectorului p_iq_i proporţional cu valoarea polinomului Bernstein în punctul respectiv.[1]

Problemă. Fie T o transformare a planului euclidian. Considerăm un poligon de control $p_0p_1\dots p_n$ şi curba Bézier corespunzătoare $b(t)$. Fie $\tilde{p}_i = T(p_i)$, $i = 0,\dots,n$ şi curba Bézier corespunzătoare $\tilde{b}(t)$. Să se verifice dacă $\tilde{b}(t) = T(b(t))$ în următoarele cazuri:

- T este o translaţie;
- T este o rotaţie în jurul originii;
- T este o omotetie în raport cu un punct diferit de cele $n+1$ puncte care definesc poligonul de control;
- T este dată prin ecuaţia $T(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Ce se observă?

[1] Se vor vizualiza la laborator mai multe exemple pentru $n = 3$.