V = mulţimea vârfurilor
E = mulţimea laturilor
T = mulţimea triunghiurilor
B →referinţă la frontieră
I →referinţă la interior

Lemă. *Au loc următoarele egalităţi:*
1) $|T| = 2|V_I| + |V_B| - 2$;
2) $|E| = 3|V_I| + 2|V_B| - 3$;
3) $|E_I| = 3|V_I| + |V_B| - 3$.

Exemplu:

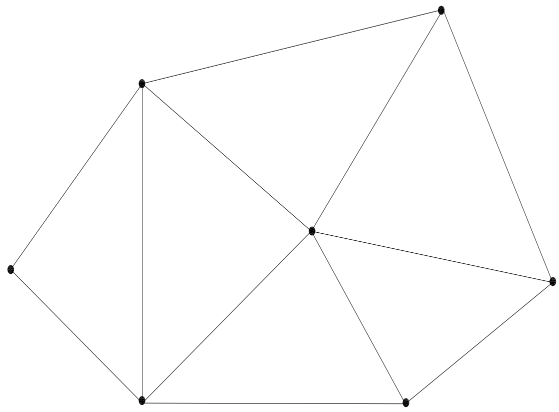


Figure 1: Exemplu.

$|T| = 6$ $|V_B| = 6$
$|E_B| = 6$ $|V_I| = 1$
$|E_I| = 6$ $|E| = 12$

Demonstraţie:

Inducţie după numărul de triunghiuri.

I.

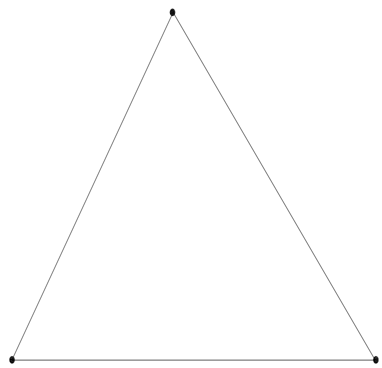


Figure 2: Triunghi.

$|T| = 1$
$|E_B| = 3$ $\qquad |V_B| = 3$
$|E_I| = 0$ $\qquad |V_I| = 0$
1) $|T| = 2|V_I| + |V_B| - 2 \Longleftrightarrow 1 = 2 \cdot 0 + 3 - 2$
2) $|E| = 3|V_I| + 2|V_B| - 3 \Longleftrightarrow 3 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3$
3) $|E_I| = 3|E_I| + |V_B| - 3 \Longleftrightarrow 0 = 3 \cdot 0 + 3 - 3$

II. $|T| = n$

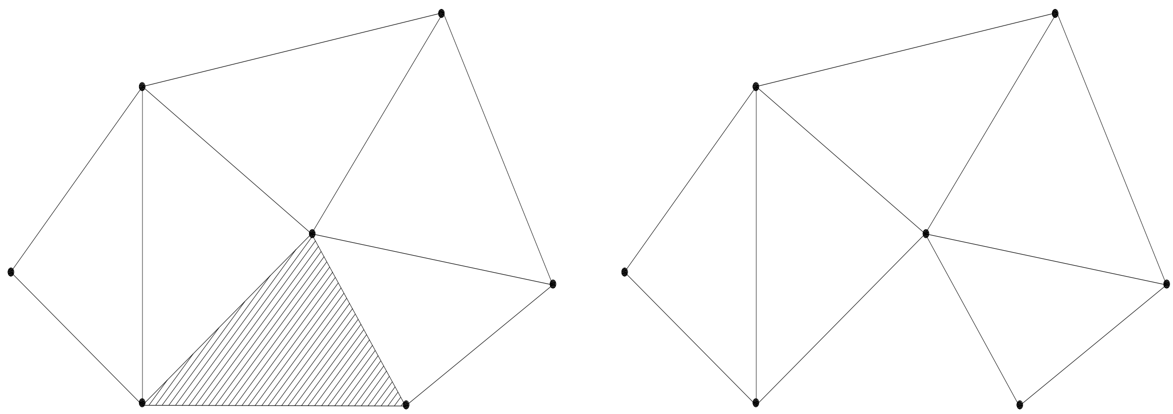
Presupunem adevărate afirmaţiile 1), 2) şi 3) pentru $n-1, n-2, ..., 2, 1$ triunghiuri. Trebuie să scoatem, un triunghi care are cel puţin o latură pe frontieră.

Avem două cazuri:

- triunghiul poate avea o singură latură pe frontieră
- triunghiul poate avea două laturi pe frontieră.

(Pentru ca triunghiularea să fie regulată trebuie ca triunghiul eliminat să aibă cel puţin o latură pe frontieră)

Cazul I: Triunghiul eliminat are o singură latură pe frontieră



$\left|\bar{V}_B\right| = |V_B| + 1;$ $\left|\bar{E}_B\right| = |E_B| + 1;$
$\left|\bar{V}_I\right| = |V_I| - 1;$ $\left|\bar{E}_I\right| = |E_I| - 2;$
$\left|\bar{T}\right| = |T| - 1.$

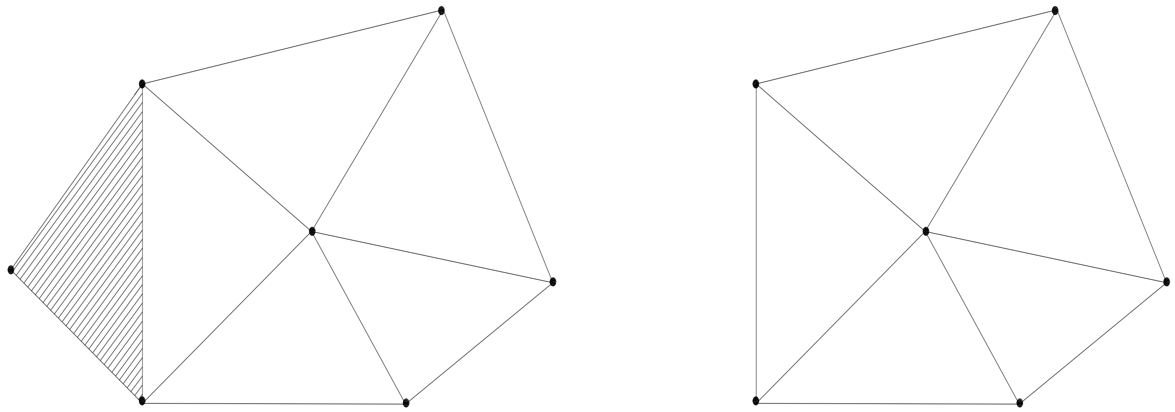
1) Conform ipotezei inductive avem:

$|T| = \left|\bar{T}\right| + 1 \Longrightarrow 2\left|\bar{V}_I\right| + \left|\bar{V}_B\right| - 2 + 1 = 2\left(\left|\bar{V}_I\right| - 1\right) + \left(\left|\bar{V}_B\right| + 1\right) - 1 = 2|V_I| + |V_B| - 2$

2) $|V_B| = |E_B|$; $|E| = |E_B| + |E_I|$

3) $|E_I| = \left|\bar{E}_I\right| + 2 = 3\left|\bar{V}_I\right| + \left|\bar{V}_B\right| - 3 + 2 = 3\left(\left|\bar{V}_I\right| - 1\right) + \left(\left|\bar{V}_B\right| + 1\right) + 1 = 3|V_I| + |V_B| - 1 + 1 - 3 = 3|V_I| + |V_I| - 3.$

Cazul II: Triunghiul eliminat are două laturi pe frontieră.



$\left|\bar{V}_B\right| = |V_B| - 1$ $\qquad$ $\left|\bar{E}_B\right| = |E_B| - 1$

$\left|\bar{V}_I\right| = |V_I|$ $\qquad$ $\left|\bar{E}_I\right| = |E_I| - 1$

1) Din ipoteza inductivă rezultă: $|T| = \left|\bar{T}\right| + 1 = 2\left|\bar{V}_I\right| + \left|\bar{V}_B\right| - 2 + 1 = 2|V_I| + |V_B| - 2$.

2) $\left|\bar{E}\right| = 2\left|\bar{V}_I\right| + 2\left|\bar{V}_B\right| - 3$

$|E| = \left|\bar{E}\right| + 2 = 2\left|\bar{V}_I\right| + 2\left|\bar{V}_B\right| - 3 + 2 = 2|V_I| + 2\left(\left|\bar{V}_B\right| + 1\right) - 3 = 2|V_I| + 2|V_B| - 3$

3) Folosind ipoteza inductivă : $|E_I| = \left|\bar{E}_I\right| + 1 = 3\left|\bar{V}_I\right| + \left|\bar{V}_B\right| - 3 + 1 = 3|V_I| + (\left|\bar{V}_B\right| + 1) - 3 = 3|V_I| + 3|V_B|$

(S.S. & D.R. – CSIP - I)