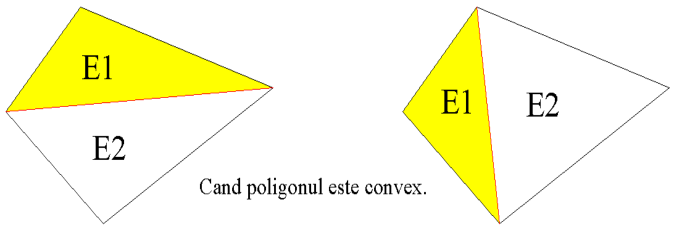
Teorema 1 (Teorema 2E –*Two Ears Theorem*) *Cu excepţia triunghiurilor, orice poligon are cel puţin două componente de tip E care nu se suprapun.*

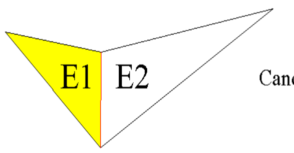
Demonstraţie: (1975, Gary H.Meisters)

Teorema se demonstrează prin inducţie după numărul vârfurilor, n, din poligonul simplu $\mathcal{P}$.

Dacă $n = 4$ atunci $\mathcal{P}$ este un patrulater şi are 2 componente de tip E (două urechi). Dacă patrulaterul este convex atunci există două posibilităţi de a se obţine componente de tip E. Dacă patrulaterul este concav atunci este o singură posibilitate.



Cand poligonul este convex.



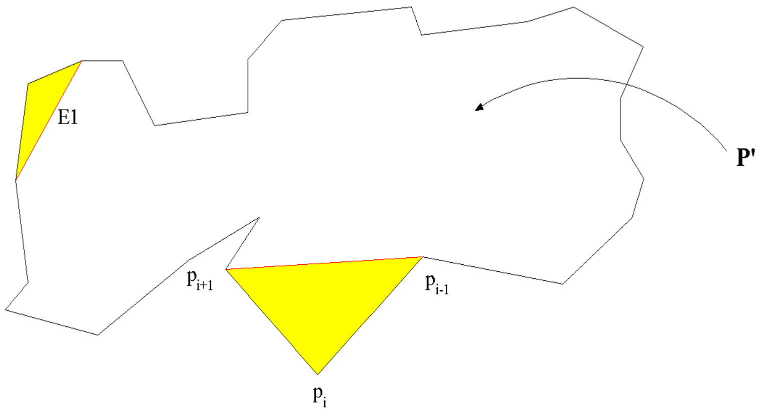
Cand poligonul este concav.

Dacă $n \geq 5$ atunci fie $\mathcal{P}$ acest poligon simplu cu cel puţin 5 vârfuri. Mă fixez într-un punct p_i oarecare. Se disting două cazuri:

- Cazul I: p_i este componentă E

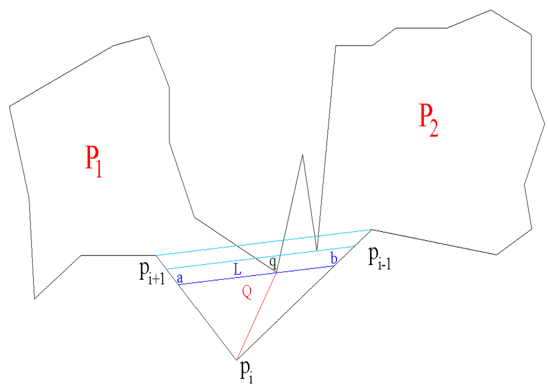
- Cazul II: p_i nu este componentă E.

Cazul I: Poligonul $\mathcal{P}$ are o componentă E în p_i, deci $p_{i-1}p_{i+1}$ este diagonală, iar triunghiul $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ nu conţine alte vârfuri ale poligonului $\mathcal{P}$. Dacă urechea este înlăturată atunci poligonul $\mathcal{P}'$ ce rămâne este un poligon simplu cu $n-1$ vârfuri. Conform ipotezei de inducţie există două urechi E_1 şi E_2 care nu se intersectează. Din moment ce nu se suprapun, măcar una din cele două urechi nu conţine vârfurile p_{i-1} sau p_{i+1}. Să spunem că aceasta este E_1. Din moment ce toate componentele E ale lui $\mathcal{P}'$ sunt componente E şi ale lui $\mathcal{P}$, rezultăcŭa poligonul $\mathcal{P}$ are două urechi: E_1 şi urechea din p_i.



Cazul II: Poligonul $\mathcal{P}$ nu are o ureche în p_i, deci p_i este vârf convex dar nu e compunentă te tip E. Astfel în triunghiul format din p_{i-1},p_i şi p_{i+1} se găsesc vârfuri din $\mathcal{P}$ iar $p_{i-1}p_{i+1}$ nu este diagonală. Duc prin fiecare punct interior paralele cu diagonala. Fie q unul din punctele interioare triunghiului $p_{i-1}p_ip_{i+1}$ astfel încât dreapta L ce trece prin q şi este paralelă cu $p_{i-1}p_{i+1}$ este cea mai apropiată de p_i în raport cu celelalte. Fie a şi b punctele de intersecţie ale dreptei L cu $p_{i-1}p_i$, respectiv p_ip_{i+1}. Triunghiul format din a, p_i şi b nu conţine vârfuri ale lui $\mathcal{P}$ în interior, pentru că altfel alegerea lui q ar fi incorectă. Unind q cu p_i se obţine o diagonală Q. Segmentul Q împarte poligonul $\mathcal{P}$ în două poligoane simple: $\mathcal{P}_1$ (care conţine vârfurile p_i,p_{i+1},...,q) şi $\mathcal{P}_2$ (care conţine vârfurile p_i,p_{i-1},...,q). Numărul poligoanelor $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ este mai mic decât cel al poligonului $\mathcal{P}$ deci pot aplica ipoteza de inducţie.

Observaţie: Poligoanele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ nu pot fi ambele triunghiuri.



Se pot considera două subcazuri:

Cazul IIa: Poligonul $\mathcal{P}_1$ este triunghi. Deci q este p_{i-2} şi atunci p_{i-1} este componentă de tip E pentru că $p_{i-2}p_i = qp_i$ este diagonală. Pentru $\mathcal{P}_2$ aplic ipoteza de inducţie. Poligonul $\mathcal{P}_\in$ trebuie sa aibă cel puţin două componente E care nu se suprapun, E_1 şi E_2 (pentru că altfel şi $\mathcal{P}_2$ ar fi un triunghi iar poligonul $\mathcal{P}$ ar avea doar patru vârfuri). E_1 şi E_2 nu se suprapun deci măcar una din cele 2 componente E foloseşte vârfurile q şi p_1; să presupunem că E_1 ar fi această componentă. Componenta E_1 nu se suprapune cu urechea formată de poligonul $\mathcal{P}$, deci este cea de-a doua ureche a poligonului $\mathcal{P}$.

Cazul IIb: Poligonul $\mathcal{P}_1$ nu este un triunghi. Deci, din ipoteza inducţiei, poligonul $\mathcal{P}_1$ are două urechi, E_1' şi E_1'', iar poligonul $\mathcal{P}_2$ are două urechi, E_2' şi E_2''. Deoarece nu se suprapun, măcar una din urechile lui $\mathcal{P}_1$, să spunem E_1', nu foloseşte vârfurile p_i şi q. Similar, cel puţin o ureche din $\mathcal{P}_2$, să spunem E_2', nu foloseşte vârfurile p_i şi q. Aceste două urechi din poligonul $\mathcal{P}$, E_1' şi E_2' nu se vor suprapune.

E.C.E.