# Diagrame Voronoi. Algoritmul lui Fortune

## 1. Diagrame Voronoi

Pentru o mulţime de puncte date în plan $\mathcal{P} := \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ numite locaţii trebuie să determinăm o divizare a planului astfel încât fiecărei locaţii sa-i atribuim cele mai apropiate puncte de ea şi cele mai depărtate de restul locaţiilor - **Modelul de atribuire Voronoi** care include subdivizarea numită **diagrama Voronoi** a mulţimii de locaţii , notată $\mathcal{V}or(\mathcal{P})$. Diviziunile se numesc **celule Voronoi** notate cu $\mathcal{V}(p_i)$.

Vom spune că un punct $q$ aparţine locaţiei $p_i$ dacă şi numai dacă $dist(q, p_i) < dist(q, p_j)$, pentru fiecare $p_j \in \mathcal{P}$ cu $j \neq i$. Laturile celulei sunt situate pe mediatoarele segmentelor, care unesc locaţiile iar pentru o locaţie $p_i$ celula corespunzătoare este dată de:

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j)$$

unde $h(p_i, p_j)$= semiplanul determinat de mediana segmentului $(p_i, p_j)$ $(d_{ij})$ şi care conţine $p_i$ iar $\mathcal{V}(p_i)$ este intersecţia tuturor semiplanelor care conţin $p_i$.

**1.1 Observaţii.**

1. Diagrama Voronoi va avea $n$ celule.
2. Orice celulă Voronoi este o mulţime convexă.
3. Laturile diagramei Voronoi sunt segmente, semidrepte sau drepte.

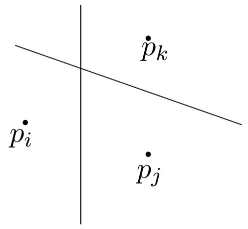


*Figura 1. Cazul în care o latură a unei celule Voronoi este o dreaptă.*

**1.2 Definiţie**

*Pentru un punct $q$ din plan definim cel mai mare cerc gol (cu tot cu interiorul său) şi îl notăm $\mathcal{C}_\mathcal{P}(q)$- cercul cu centrul în $q$ şi care nu conţine nici o locaţie din $\mathcal{P}$ în interior şi are raza cea mai mare cu proprietatea cerută.*

**1.3 Teoremă**

*1. Un punct $q$ este vârf al diagramei $\mathcal{V}or(\mathcal{P})$ dacă şi numai dacă frontiera celui mai mare cerc gol $\mathcal{C}_\mathcal{P}(q)$ conţine cel puţin trei locaţii.*

*2. Mediatoarea segmentului dintre locaţiile $p_i$ şi $p_j$ defineşte o latură a diagramei dacă şi numai dacă $\exists q$ pe mediatoare astfel încât $p_i, p_j \in \mathcal{C}_\mathcal{P}(q)$ şi nici o locaţie nu aparţine acestui cerc .*

**Construcţia diagramei**

1. Construirea tuturor celulelor Voronoi independent: complexitatea din punct de vedere al timpului ar fi $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

2. *Divide et impera* : complexitatea din punct de vedere al timpului ar fi $\mathcal{O}(n \log n)$.

3. Algoritmul lui Fortune: complexitatea din punct de vedere al timpului ar fi $\mathcal{O}(n \log n)$.

## 2. Algoritmul lui Fortune

Algoritmul lui Fortune foloseşte tehnica **liniei de baleiere (sweep line)** notată cu $l$. Fiecare locaţie de deasupra lui $l$ determină câte o parabolă - locul geometric al punctelor mai apropiate de orice locaţie de deasupra lui $l$ decât de $l$. Se formează astfel **linia parabolică (beach line)**, iar punctele sale de întrerupere la deplasarea liniei de baleiere vor determina laturile celulelor Voronoi.

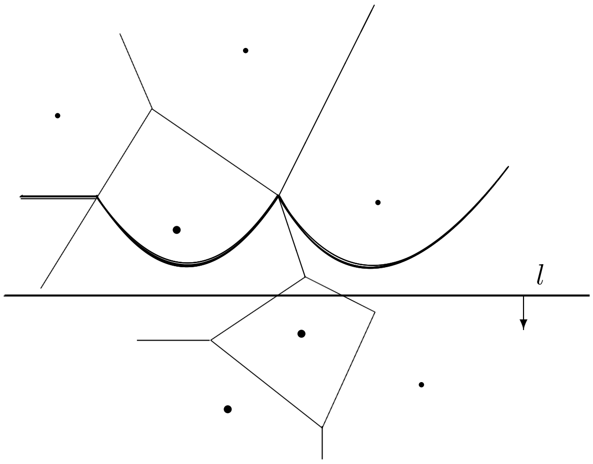


*Figura 2. Generarea liniei parabolice prin deplasarea liniei de baleiere.*

Punctele de întrerupere trasează diagrama, în timp ce linia de baleiere parcurge planul. Astfel, în loc să păstrăm intersecţiile lui $\mathcal{V}or(\mathcal{P})$ cu $l$, vom reţine linia parabolică la deplasarea liniei de baleiere. Nu putem s-o păstrăm explicit, din moment ce se modifică o dată cu deplasarea continuă a liniei $l$.

**Cazul 1**

Mai întâi considerăm evenimentele în care apare un nou arc al liniei parabolice. O astfel de situaţie avem când dreapta $l$ întâlneşte o nouă locaţie. Parabola definită de această locaţie este la început o parabolă degenerată, adică un segment de dreaptă vertical care uneşte locaţia respectivă cu linia parabolică. Cum dreapta $l$ se deplasează în continuare, noua parabolă prinde contur. Partea noii parabole situată sub vechea linie parabolică este acum o parte din actuala linie parabolică.

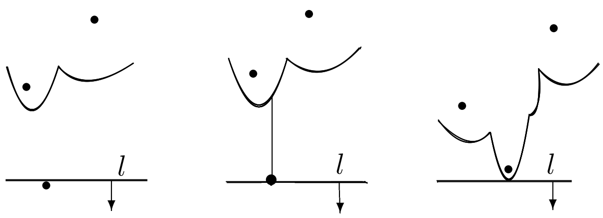


*Figura 3. Apariţia unui nou arc de parabolă la întâlnirea unei locaţii.*

**2.1 Definiţie.**

*Evenimentul în care o nouă locaţie este întâlnită la deplasarea liniei de baleiere, se numeşte* **locaţie eveniment**.

**2.2 Lemă**

*Singurul mod în care poate apărea un nou arc pe linia parabolică este prin intermediul unei locaţii eveniment.*

**Cazul 2**

Un al doilea tip de evenimente în algoritmul planului sweep este cel în care un arc existent al liniei parabolice se contractă până dispare.

Fie $a'$ arcul care va dispărea, iar $a$ şi $a''$ arcele vecine lui în configuraţia iniţială. Arcele $a$ şi $a''$ nu pot face parte din aceeaşi parabolă, aşa că obţinem cele trei arce definite de trei locaţii diferite $p_i$, $p_j$ şi $p_k$. Când arcul $a'$ dispare, celelalte două arce vecine vor avea un punct comun, notat $q$. Punctul $q$ este echidistant faţă de $l$ şi cele trei arce. Deci, există un cerc de centru $q$ care trece prin punctele $p_i$, $p_j$ şi $p_k$ tangent la dreapta $l$. Nu poate exista nici o locaţie în interiorul acestui cerc: o asemenea locaţie ar fi apropiată de $l$ decât este apropiat $q$ de $l$, contrazicând faptul că punctul $q$ aparţine liniei parabolice. Rezultă că punctul $q$ este un vârf al diagramei Voronoi.

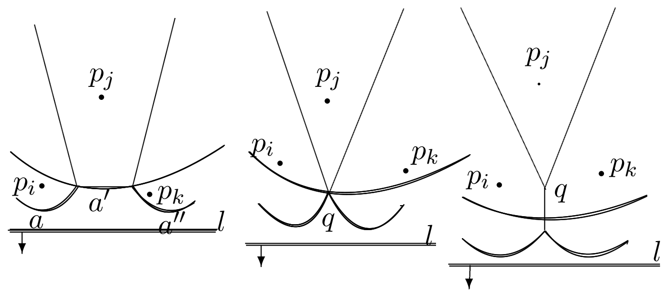


*Figura 4. Dispariţia unui arc de pe linia parabolică*

**2.3 Definiţie**

*Evenimentul în care linia de baleiere intersectează cel mai de jos punct al unui cerc care trece prin trei locaţii definind arcele consecutive ale liniei parabolice, se numeşte* **eveniment cerc**.

**2.4 Lemă**

*Singurul mod în care un arc existent poate dispărea de pe linia parabolică este prin intermediul unui eveniment cerc .*

BE & SD