

## Topologia numerelor complexe

**1. Șiruri și serii în  $\mathbb{C}$ .** Prin *distanța* dintre  $z_1 = x_1 + iy_1$  și  $z_2 = x_2 + iy_2$  înțelegem lungimea segmentului determinat de punctele  $z_1$  și  $z_2$  din planul complex:

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Se verifică imediat că aplicația  $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietățile unei *metrici*:

$$(M_1) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \quad d(u, v) \geq 0; \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$$

$$(M_2) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \quad d(u, v) = d(v, u);$$

$$(M_3) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}, \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v);$$

și, prin urmare,  $(\mathbb{C}, d)$  este un *spațiu metric*. Aceasta înseamnă că avem gata definite, din teoria generală a spațiilor metrice, o serie de noțiuni legate de convergența șirurilor și de continuitatea funcțiilor.

Un șir  $(z_n)_n$  de numere complexe este *convergent* dacă există  $z^* \in \mathbb{C}$ , limita sa, astfel încât șirul distanțelor de la  $z_n$  la  $z^*$  să tindă la zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z^*| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z^*| < \varepsilon.$$

Convergența șirurilor se caracterizează pe componente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = x^* + iy^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*,$$

datorită dublei inegalități

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Orice șir convergent este mărginit, fără ca reciproca să aibe loc.

Un șir care nu este convergent este numit șir *divergent*. Despre un șir spunem că *tinde la infinit* dacă șirul modulelor sale tinde la plus infinit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Atenție la limitele infinite: la șirurile de numere reale există limitele  $-\infty$  și  $+\infty$ , în  $\mathbb{C}$  avem numai  $\infty$  fără semn!

Șirurile care tind la infinit sunt nemărginite, deci divergente, dar nu toate șirurile nemărginite tind la infinit.

**Exemplu.** Să se studieze șirul puterilor unui număr complex  $\omega \in \mathbb{C}$ .

*Rezolvare.* Fie  $\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Atunci  $\omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  și deci, dacă  $|\omega| = \rho < 1$  atunci  $\omega^n \rightarrow 0$  deoarece

$$\rho^n \cos n\theta \rightarrow 0 \text{ și } \rho^n \sin n\theta \rightarrow 0,$$

dacă  $\rho > 1$  atunci  $\omega^n \rightarrow \infty$  deoarece  $|\omega^n| = \rho^n \rightarrow +\infty$ , iar dacă  $|\rho| = 1$  șirul rămâne pe cercul unitate, fiind convergent numai în cazul în care este constant,

adică pentru  $\omega = 1$ , în rest fiind periodic (când raportul  $\pi/\theta$  este rațional) sau dens distribuit pe cercul unitate. Reținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n = \begin{cases} \infty & \text{pentru } |\omega| > 1; \\ 0 & \text{pentru } |\omega| < 1; \\ 1, & \text{pentru } \omega = 1; \\ \cancel{A} & \text{pentru } |\omega| = 1 \text{ cu } \omega \neq 1; \end{cases}$$

Șirul  $(z_n)_n$  se numește *șir Cauchy* dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Spațiul metric  $(\mathbb{C}, d)$  coincide cu  $\mathbb{R}^2$  dotat cu metrica uzuală, deducem că  $\mathbb{C}$  este *complet*: orice șir Cauchy de numere complexe este convergent.

Deoarece convergența este caracterizată pe componente iar operațiile în  $\mathbb{C}$  au fost definite pe componente, deducem imediat că din  $u_n \rightarrow u^* \in \mathbb{C}$  și  $z_n \rightarrow z^* \in \mathbb{C}$  rezultă

- (a)  $u_n + z_n \rightarrow u^* + z^*$ ;
- (b)  $u_n z_n \rightarrow u^* z^*$ ;
- (c)  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}^*$ ;
- (d)  $|z_n| \rightarrow |z^*|$ ;
- (e)  $u_n/z_n \rightarrow u^*/z^*$  (aici se cere  $z^* \neq 0$  și  $\forall n, z_n \neq 0$ );

Să observăm că reciproca implicației  $z_n \rightarrow z^* \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z^*|$ , are loc numai în cazul  $z^* = 0$ .

Analog cazului real, pot fi formulate și unele reguli de calcul cu limite infinite, de exemplu

$$\frac{1}{\infty} = 0, \text{ adică: } z_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow 0.$$

Atenție, nu toate regulile din  $\mathbb{R}$  sunt valabile în  $\mathbb{C}$ , de exemplu acum  $\infty + \infty$  este caz de nedeterminare. În plus, apar reguli noi, cum ar fi:

$$\frac{1}{0} = \infty, \text{ adică: } z_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow \infty.$$

În concluzie, deoarece convergența în  $\mathbb{C}$  este compatibilă cu operațiile, unele limite de șiruri pot fi stabilite prin calcul, analog cazului real.

**Exemplu.** Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n + 1}{(1+i)^n - 1}.$$

*Rezolvare.* Notăm  $\omega = 1 + i$ . Deoarece  $|\omega| = \sqrt{2} > 1$  avem  $\omega^n \rightarrow \infty$ , prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega^n + 1}{\omega^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega^n \left(1 + \frac{1}{\omega^n}\right)}{\omega^n \left(1 - \frac{1}{\omega^n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

Fie  $(z_n)_n$  un șir de numere complexe. Exact ca în cazul seriilor de numere reale, spunem că *seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots,$$

are *suma*  $s$ , cu  $s \in \mathbb{C}$  sau  $s = \infty$ , dacă *șirul sumelor sale parțiale*

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

are limita  $s$ , adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + \cdots + z_n) = s.$$

Seria este *convergentă* dacă are sumă finită (adică  $s \in \mathbb{C}$ ), altfel este *divergentă*. Din proprietatea de completitudine, rezultă că seria dată este convergentă dacă și numai dacă satisface condiția de tip Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a. î. } \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \geq 1 \text{ avem } \sum_{k=1}^p z_{n+k} < \varepsilon.$$

Din caracterizarea pe componente a convergenței în  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n)$  este convergentă dacă și numai dacă ambele serii de numere reale  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  sunt convergente, caz în care are loc egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

**Exemplu.** Să se studieze convergența *seriei geometrice*

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^n + \cdots$$

în mulțimea numerelor complexe.

*Rezolvare.* Șirul sumelor parțiale este dat de formula

$$s_n = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = \begin{cases} \frac{1 - \omega^{n+1}}{1 - \omega} & \text{pentru } \omega \neq 1, \\ n + 1 & \text{pentru } \omega = 1, \end{cases}$$

și este convergent numai dacă  $|\omega| < 1$ , caz în care limita este  $\frac{1}{1-\omega}$ .

Reținem: în mulțimea numerelor complexe, seria geometrică cu rația  $\omega$  este convergentă numai dacă  $|\omega| < 1$ , și atunci are suma

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n + \cdots = \frac{1}{1 - \omega},$$

rezultat analog cazului real.

Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  se numește *absolut convergentă* dacă seria de numere reale cu termeni pozitivi  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  este convergentă. Din proprietatea de completitudine, rezultă că orice serie absolut convergentă este convergentă, dar reciproca nu are loc.

**Exemplu.** Să se arate că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

este convergentă fără să fie absolut convergentă.

*Rezolvare.* Notăm  $z_n = \frac{i^n}{n} = \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right)$ . Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

deci seria nu este absolut convergentă, în timp ce atât seria părților reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots,$$

cât și seria părților imaginare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots,$$

sunt, conform criteriului lui Leibniz, convergente.

**2. Mulțimi deschise și mulțimi închise în  $\mathbb{C}$ .** Fie  $z_0 \in \mathbb{C}$  și  $r > 0$ . Notăm cu

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ pentru care } |z - z_0| < r\}$$

*discul deschis* de centru  $z_0$  și rază  $r$ . Mulțimea  $V \subset \mathbb{C}$  se numește *vecinătate* pentru  $z_0 \in \mathbb{C}$  dacă există  $r > 0$  astfel încât  $D(z_0, r) \subset V$ , caz în care spunem că  $z_0$  este *punct interior* lui  $V$ . Mulțimea punctelor interioare unei mulțimi  $A$  se notează cu  $\overset{\circ}{A}$ .

Mulțimea  $D \subset \mathbb{C}$  se numește *deschisă* dacă  $D = \overset{\circ}{D}$  sau dacă  $D$  este vecinătate pentru orice  $z \in D$ , altfel spus, dacă  $D = \overset{\circ}{D}$ . Se verifică imediat că mulțimea  $\mathbb{C}$  este deschisă, că intersecția a două mulțimi deschise este deschisă și că reuniunea oricărei familii de mulțimi deschise este deschisă. Amintim că acestea sunt proprietățile definitorii pentru clasa mulțimilor deschise ale unui *spațiu topologic*.

Mulțimea  $F \subset \mathbb{C}$  se numește *închisă* dacă  $\mathbb{C} \setminus F$  este deschisă. Din legile lui De Morgan rezultă imediat că intersecția oricărei familii de mulțimi închise este închisă. Urmează că pentru fiecare mulțime  $A \subset \mathbb{C}$  există o cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime închisă care conține pe  $A$ , mulțime notată cu  $\overline{A}$  și

numită *închiderea* mulțimii  $A$ . Mai precis, dacă notăm cu  $\mathcal{F}_A$  familia mulțimilor închise care conțin mulțimea  $A$ , atunci

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F.$$

Închiderea  $\bar{A}$  este formată din limitele șirurilor de elemente din  $A$ , altfel spus:  $a^* \in \bar{A}$  dacă și numai dacă există un șir  $(a_n)_n$  din  $A$  astfel încât  $a_n \rightarrow a^*$ . Elementele lui  $\bar{A}$  se numesc *puncte aderente* mulțimii  $A$ .

*Frontiera* mulțimii  $A$  se notează

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus A},$$

și este formată, așadar, din punctele aderente atât mulțimii  $A$  cât și complementarei sale.

Numărul complex  $a^* \in \mathbb{C}$  se numește *punct de acumulare* pentru mulțimea  $A \subset \mathbb{C}$  dacă este punct aderent mulțimii  $A \setminus \{a^*\}$ , adică dacă există un șir  $(a_n)_n$  din  $A \setminus \{a^*\}$  astfel încât  $a_n \rightarrow a^*$ . Dacă  $a^* \in A$ , dar  $a^*$  nu este punct de acumulare pentru  $A$ , atunci  $a^*$  se numește *punct izolat* al mulțimii  $A$ .

Până acum, în toate definițiile și caracterizările din această secțiune, am lucrat numai cu șiruri convergente, adică cu șiruri care au limita finită. Pentru a lucra și cu șiruri care tind la infinit, este comod să adăugăm la mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$  încă un element, notat cu simbolul  $\infty$  și numit *punctul de la infinit*. Mulțimea  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  este numită *planul complex extins* și se notează cu  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , notație care sugerează că punctul de la infinit este punct de acumulare pentru mulțimea  $\mathbb{C}$ . Vom topologiza mulțimea  $\bar{\mathbb{C}}$  astfel încât această afirmație să fie adevărată, definind vecinătățile punctului de la infinit astfel: mulțimea  $V \subset \bar{\mathbb{C}}$  se numește *vecinătate a punctului*  $\infty$  dacă există  $r > 0$  astfel încât  $\mathbb{C} \setminus D(0, r) \subset V$ .

Utilizând definiția cu vecinătăți a limitelor, este ușor de văzut că un șir  $(z_n)_n$  din  $\mathbb{C}$  are limita  $\infty$  în această topologie, dacă și numai dacă  $|z_n| \rightarrow +\infty$ , așa cum ne-am propus.

Planul complex extins are o interpretare geometrică remarcabilă, dată de *proiecția stereografică* a unei sfere pe un plan care trece prin centrul sferei. Mai precis, considerăm

$$\mathcal{S} = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \text{ pentru care } x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$$

sfera unitate din  $\mathbb{R}^3$  centrată în origine și o înzestrăm cu topologia de subspațiu din  $\mathbb{R}^3$ . Cu alte cuvinte, o mulțime  $U \subset \mathcal{S}$  este deschisă în topologia lui  $\mathcal{S}$  dacă și numai dacă există o submulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^3$  astfel încât  $U = D \cap \mathcal{S}$ .

Notăm cu  $\pi$  planul  $xOy$ , de ecuație  $u = 0$ , și cu  $N(0, 0, 1)$  punctul numit *polul nord* al sferei unitate. Fie  $P(x_P, y_P, u_P) \in \mathcal{S}$  cu  $P \neq N$ , și fie  $Z(x_Z, y_Z, 0)$  punctul de intersecție al dreptei  $NP$  cu planul  $\pi$ . Corespondența  $P \rightarrow Z$  este clar o bijecție între  $\mathcal{S} \setminus \{N\}$  și planul  $\pi$ , pe care o putem scrie chiar explicit.

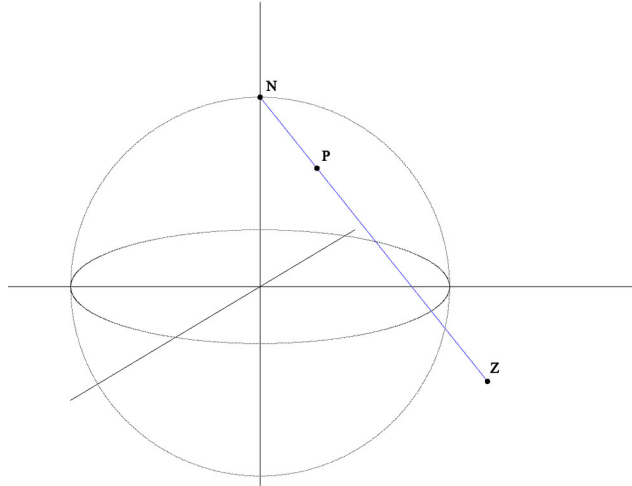


FIGURA 1. Sfera lui Riemann

Ecuția dreptei  $NP$  în reperul cartezian  $Oxyu$  din spațiul tridimensional  $\mathbb{R}^3$  este

$$\frac{x - 0}{x_P - 0} = \frac{y - 0}{y_P - 0} = \frac{u - 1}{u_P - 1},$$

de unde urmează că

$$\frac{x_Z}{x_P} = \frac{y_Z}{y_P} = \frac{-1}{u_P - 1},$$

deci

$$\begin{cases} x_Z = \frac{x_P}{1 - u_P}, \\ y_Z = \frac{y_P}{1 - u_P}. \end{cases}$$

Identificăm acum  $\mathbb{C}$  cu  $\pi$  prin corespondența

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow Z(x, y, 0) \in \pi,$$

și definim aplicația  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  prin

$$\varphi(P) = \begin{cases} \frac{x_P}{1 - u_P} + i \frac{y_P}{1 - u_P}, & \text{pentru } P \neq N, \\ \infty, & \text{pentru } P = N. \end{cases}$$

Este ușor de văzut că aplicația  $\varphi$ , numită *proiecția stereografică de centru  $N$* , este un omeomorfism de la  $\mathcal{S}$  la  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , adică o aplicație bijectivă care păstrează vecinătățile punctelor.

Acest model geometric al lui  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  este numit *sfera lui Riemann*. Ca o consecință, definind distanța dintre două elemente din  $\overline{\mathbb{C}}$  ca fiind lungimea segmentului determinat de punctele corespunzătoare lor pe sfera lui Riemann, se obține o metrică pe  $\overline{\mathbb{C}}$ , iar topologia indusă de această metrică coincide cu cea definită mai sus.

**3. Limite de funcții și continuitate.** Topologia lui  $\mathbb{C}$  este topologia indusă de metrica  $d(u, v) = |u - v|$ , prin urmare noțiunile de limită și de continuitate pentru funcții care au argumentul sau valorile în  $\mathbb{C}$  se definesc ca în cadrul spațiilor metrice și, în consecință, pot fi caracterizate cu șiruri. Deoarece și topologia lui  $\overline{\mathbb{C}}$  este indusă de o metrică, și limita infinit poate fi caracterizată cu șiruri.

Mai mult, deoarece mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$  poate fi identificată cu  $\mathbb{R}^2$  și din punct de vedere topologic, noțiunile de limită și de continuitate pot fi caracterizate pe componente.

**Definiție.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  sau  $A \subset \mathbb{C}$  și  $a^*$  un punct de acumulare al lui  $A$ . Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  are limita  $\ell$ , pentru  $a \rightarrow a^*$ , dacă pentru orice vecinătate  $V_\ell$  a lui  $\ell$  există o vecinătate  $V_{a^*}$  a lui  $a^*$  astfel încât  $f(V_{a^*} \setminus \{a^*\}) \subset V_\ell$ .

În definiția de mai sus limitele  $a^*$  și  $\ell$  pot fi finite sau nu. Are loc următoarea caracterizare cu șiruri:

$$\lim_{a \rightarrow a^*} f(a) = \ell \Leftrightarrow \left( \forall (a_n)_n \subset A \setminus \{a^*\}, a_n \rightarrow a^* \Rightarrow f(a_n) \rightarrow \ell \right).$$

În cazul  $\ell \neq \infty$ , avem caracterizarea pe componente: limita  $\lim_{a \rightarrow a^*} f(a)$  există și este finită dacă și numai dacă funcțiile  $x = x(a) = \operatorname{Re} f(a)$  și  $y = y(a) = \operatorname{Im} f(a)$  au limite finite, și atunci avem

$$\lim_{a \rightarrow a^*} (x(a) + iy(a)) = \lim_{a \rightarrow a^*} x(a) + i \lim_{a \rightarrow a^*} y(a).$$

**Definiție.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  sau  $A \subset \mathbb{C}$  și  $a_0 \in A$ . Funcția  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  este continuă în  $a_0$  dacă: fie  $a_0$  nu este punct de acumulare pentru  $A$  (adică este punct izolat) fie  $\lim_{a \rightarrow a_0} f(a) = f(a_0)$ . Funcția  $f$  se numește continuă pe  $A$  dacă este continuă în orice punct din  $A$ .

Este clar că o funcție  $f$  cu valori complexe este continuă dacă și numai dacă funcțiile ambele funcții componente,  $\operatorname{Re} f$  și  $\operatorname{Im} f$  sunt continue.

3.1. *Funcții complexe de argument real.* Fie  $I \subset \mathbb{R}$  un interval. O funcție  $z : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  este formată dintr-o pereche de funcții reale  $x$  și  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de egalitatea

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in I.$$

Astfel de funcții sunt utilizate în descrierea mișcării unui punct în plan. De exemplu,

$$z(t) = t(\cos t + i \sin t), \quad t \in [0, +\infty),$$

reprezintă *legea orară* după care un punct se deplasează pe o spirală care pornește din origine. Cele două funcții reale componente dau ecuațiile parametrice ale spiralei:

$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$$

pentru  $t \in [0, +\infty)$ .

Fie  $t_0 \in I$ . După cum am văzut, limita și continuitatea funcției  $z = z(t)$  în  $t_0$  se caracterizează pe componente, la fel ca derivabilitatea:

$$z'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

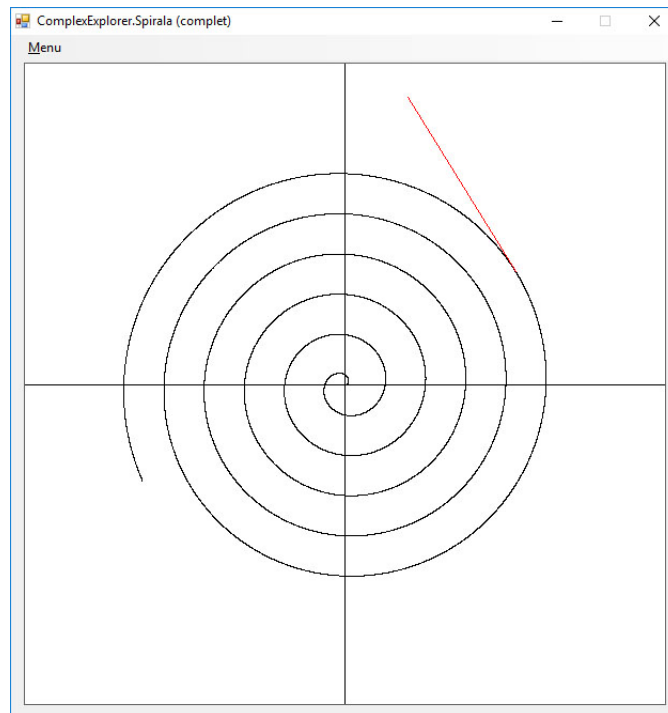
Din definiția derivatei rezultă *aproximarea*

$$z(t) \approx z(t_0) + (t - t_0)z'(t_0) \text{ pentru } t \approx t_0,$$

care înlocuiește mișcarea lui  $z = z(t)$  cu o mișcare rectilinie uniformă cu viteza  $|z'(t_0)|$  pe tangenta la traiectorie în punctul  $z_0 = z(t_0)$ . În concluzie, derivata unei funcții complexe de argument real se calculează pe componente

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

și reprezintă *vectorul viteză instantanee* al punctului în mișcare  $z = z(t)$ . El dă direcția tangentei la traiectorie în punctul curent.



Clasa  $C^\#$  de mai jos desenează cu negru traiectoria punctului  $z = t(\cos t + i \sin t)$  pe intervalul  $t \in [0, 35]$  și trasează cu roșu vectorul viteză la momentul  $t_0 = 32$ :

```
public class Spirala : ComplexForm
{
    static Complex i = new Complex(0, 1);
    Complex z(double t) {
        return t * (Math.Cos(t) + i * Math.Sin(t));
    }
}
```



```

Complex zprim(double t)
{
    return (Math.Cos(t) + i * Math.Sin(t)) +
           t * (-Math.Sin(t) + i * Math.Cos(t));
}

public override void makeImage()
{
    setXminXmaxYminYmax(-50, 50, -50, 50);
    ScreenColor = Color.White;
    PenColor = Color.Black;
    setAxis();
    for (double t = 0; t < 35; t += 0.001)
    {
        setPixel(z(t), PenColor);
    }
    double t0 = 32;
    Complex z0 = z(t0);
    setLine(z0, z0 + zprim(t0), Color.Red);
    resetScreen();
}
}

```

3.2. *Funcții complexe de argument complex.* Orice funcție  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  are forma

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

pentru orice  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , cu  $u, v : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții reale de două variabile reale. Știm că limitele finite și continuitatea se caracterizează pe componente:

$$\lim_{z \rightarrow z^*} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} v(x, y).$$

pentru orice punct de acumulare  $z^* = x^* + iy^*$  al lui  $D$ .

Analog limitelor de șiruri, există un calcul cu limite de funcții dat de următoarele reguli: dacă există  $\lim_{z \rightarrow z^*} f_1(z) = l_1$  și  $\lim_{z \rightarrow z^*} f_2(z) = l_2$ , atunci

- există  $\lim_{z \rightarrow z^*} (f_1 + f_2)(z) = l_1 + l_2$ , cu excepția cazului  $l_1 = l_2 = \infty$  și cu convenția  $l + \infty = \infty$  pentru  $l \in \mathbb{C}$ ;
- există  $\lim_{z \rightarrow z^*} (f_1 f_2)(z) = l_1 l_2$ , cu excepția cazului  $0 \cdot \infty$  și cu convenția  $l \cdot \infty = \infty$  pentru  $l \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ;
- există  $\lim_{z \rightarrow z^*} \left( \frac{f_1}{f_2} \right) (z) = \frac{l_1}{l_2}$ , cu excepțiile  $\frac{0}{0}$  și  $\frac{\infty}{\infty}$ , și cu convențiile  $\frac{l}{0} = \infty$  pentru  $l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  și  $\frac{l}{\infty} = 0, \frac{\infty}{l} = \infty$  pentru  $l \in \mathbb{C}$ ;

În plus,

- dacă  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{C}$  cu  $\lim_{z \rightarrow z^*} f(z) = w^*$  și  $f(z) \neq w^*$  pentru  $z \neq z^*$ , iar  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  cu  $\lim_{z \rightarrow w^*} g(z) = \ell$  atunci  $\lim_{z \rightarrow z^*} g(f(z)) = \ell$ .

**Exemplu.** Să se arate că pentru orice funcție polinom de grad  $n \geq 1$  cu coeficienți complecși

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

avem

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty.$$

*Rezolvare.* Este clar că  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n = (\lim_{z \rightarrow \infty} z)^n = \infty^n = \infty$ , și astfel:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} P(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) = \\ &= \infty \cdot \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{\infty} + \dots + \frac{a_0}{\infty} \right) = \infty \cdot (a_n + 0 + \dots + 0) = \infty, \end{aligned}$$

deoarece  $a_n \neq 0$ .

Ca o consecință a compatibilității trecerii la limită cu operațiile, și continuitatea este compatibilă cu operațiile: dacă  $f, g$  sunt continue pe  $D \subset \mathbb{C}$ , atunci și  $f + g$ ,  $fg$  și  $\frac{f}{g}$  sunt continue peste tot unde sunt definite în  $D$ , iar dacă  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{C}$  și  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  sunt continue, atunci și  $g \circ f$  este continuă. În plus, dacă  $f = u + iv$  este continuă și conjugata sa,  $\bar{f} = u - iv$ , este continuă.

Este important de reținut că pentru o funcție  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , studiul limitei și continuității în punctul de la infinit se poate reduce la studiul în 0 deoarece limita  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  există dacă și numai dacă există  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$  și în acest caz

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

**3.3. Funcții reale de argument complex.** Deoarece topologia lui  $\mathbb{R}$  coincide cu urma topologiei lui  $\mathbb{C}$  pe  $\mathbb{R}$ , funcțiile  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  pot fi considerate, din punctul de vedere al limitelor și al continuității, ca fiind de forma  $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , cu  $v$  funcția nulă.

Funcțiile  $z \mapsto \operatorname{Re} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{Im} z$  și  $z \mapsto |z|$  sunt continue pe  $\mathbb{C}$ . Funcția argument,  $z \mapsto \arg z$ , este continuă în orice punct din  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

**4. Mulțimi compacte, mulțimi conexe.** Fie  $K \subset \mathbb{C}$ . Mulțimea  $K$  se numește *compactă* dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăți echivalente:

- $K$  este mulțime închisă și mărginită;
- orice șir din  $K$  admite un subșir convergent la un element din  $K$ ;
- orice acoperire deschisă a lui  $K$  are o subacoperire finită;

Fie  $A \subset \mathbb{C}$  o submulțime nevidă. Numim *curbă* în  $A$  o funcție continuă  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ , cu  $a < b$  două numere reale oarecare. De fapt funcția  $\gamma$  este doar o *parametrizare* a unei curbe, prin abuz vom nota tot cu  $\gamma$  și imaginea acestei funcții.

Mulțimea  $A \subset \mathbb{C}$  este *conexă prin arce* pentru orice  $u$  și  $v$  din  $A$  există o curbă  $\gamma$  în  $A$  astfel încât  $\gamma(a) = u$  și  $\gamma(b) = v$ . Mulțimea  $A$  se numește *conexă* dacă nu există submulțimile  $A_1, A_2 \subset A$ , nevide, disjuncte, deschise în  $A$  și astfel încât  $A = A_1 \cup A_2$ .

Pentru o mulțime deschisă  $D$ , conexiunea și conexiunea prin arce sunt proprietăți echivalente.

Proprietățile de compacitate și conexiune se conservă prin funcții continue: dacă  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  este continuă, iar  $A$  este compactă (respectiv conexă) atunci  $f(A)$  este compactă (respectiv conexă).

Fie  $a \in A$ . Prin *componenta conexă* a lui  $a$  în  $A$  înțelegem mulțimea

$$C_a = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_a} C,$$

unde cu  $\mathcal{C}_a$  am notat familia submulțimilor conexe ale lui  $A$  care îl conțin pe  $a$ . Este evident că  $C_a$  este conexă, fiind chiar cea mai mare (în sensul incluziunii) submulțime conexă a lui  $A$  care îl conține pe  $a$ .