Cursul 6

Integrala în complex

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$. Ne punem problema existenţei unei *primitive* a lui f, adică a unei funcţii olomorfe $F : D \to \mathbb{C}$ astfel încât $F' = f$.

În cazul funcţiilor reale, orice funcţie continuă pe un interval are primitive, iar acestea sunt date de formula Leibniz-Newton

$$F(u) = F(u_0) + \int_{u_0}^{u} f(z)dz.$$

Justificarea acestei formule este imediată: dacă $F' = f$, scriem că pe fiecare subinterval al unei diviziuni $\Delta : u_0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = u$ are loc aproximarea

$$F(z_k) - F(z_{k-1}) \approx F'(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

şi sumăm aceste relaţii. În stânga avem o sumă telescopică iar în dreapta o sumă Riemann:

$$F(u) - F(u_0) = \sum_{i=1}^{n} F(z_k) - F(z_{k-1}) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_i)(z_k - z_{k-1}) = \sigma_\Delta(f, \zeta).$$

Aceste relaţii sunt valabile şi în cazul funcţiilor complexe, şi urmând acestă idee am putea încerca să definim direct "integrala de la a la b" a lui f ca limita sumelor $\sigma_\Delta(f, \zeta)$, pentru $\nu(\Delta) = \max |z_k - z_{k-1}| \to 0$, oricum am alege nodurile $a = z_0, z_1, \ldots, z_n = b$ în $D \subset \mathbb{C}$ şi oricum am alege "punctele intermediare" ζ_k. Totuşi, această libertate totală în alegerea punctelor z_k ar restrânge nepermis de mult clasa funcţiilor integrabile; se poate arăta că nici măcar funcţia $f(z) = z$, de exemplu, nu ar fi integrabilă.[1]

Problema se rezolvă astfel: definim mai întâi integrala lui f pe o curbă $\gamma \subset \mathbb{C}$, considerând numai diviziuni $\Delta \subset \gamma$, şi apoi arătăm că f are primitive dacă şi numai dacă valoarea acestei integrale este aceeaşi pe toate curbele dintre a şi b, caz în care are loc formula Leibniz-Newton.

Această cale este uşor de urmat, deoarece integrala lui f pe o curbă se defineşte ca o integrală Riemann-Stieltjes care se reduce imediat la o pereche de integrale curbilinii de specia a II-a în $\mathbb{R}^2$, iar acest tip de integrală este deja studiat.

[1]Justificare: pentru aceeaşi diviziune Δ_n, dacă alegem întâi $\zeta_k = z_k$, $\forall k$, şi apoi $\tilde{\zeta}_k = z_{k-1}$, $\forall k$, diferenţa sumelor Riemann corespunzătoare va fi

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \zeta) - \sigma_{\Delta_n}(f, \tilde{\zeta}) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})^2.$$

Pentru $a = 0$ şi $b = 1$, de exemplu, se pot alege chiar pe axa reală punctele $a = z_0, z_1, \ldots, z_n = b$ astfel încât şi $\frac{1}{\sqrt{n}} \le |z_k - z_{k-1}| \le \frac{2}{\sqrt{n}}$, $\forall k$. Avem $\nu(\Delta_n) \to 0$ şi $\sigma_{\Delta_n}(f, \zeta) - \sigma_{\Delta_n}(f, \tilde{\zeta}) \ge 1$.

§1. Integrale pentru funcţii reale

Amintim aici câteva noţiuni şi rezultate de calcul integral pentru funcţii reale necesare pentru definirea inegralei complexe.

Fie $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Prin *diviziune* a intervalului $[\,a, b\,]$ vom înţelege o mulţime finită $\Delta_n = \{t_k,\ k = 0, 1, \ldots, n\} \subset [\,a, b\,]$, supusă la condiţia esenţială: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Vom nota *creşterile argumentului* cu $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ şi cu $\Delta f(t_k) = f(t_k) - f(t_{k-1})$ *creşterile funcţiei* (chiar dacă acestea din urmă pot fi negative). Prin *norma* diviziunii înţelegem

$$\nu(\Delta_n) = \max_k \Delta t_k.$$

Notăm cu $\tau = \{\tau_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ o *alegere a punctelor intermediare* cu $\tau_k \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$, pentru $\forall k$.

§1.1. Integrala Riemann. Fie $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Dacă f este pozitivă, atunci *suma Riemann*

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k$$

aproximează aria cuprinsă între graficul lui f şi axa orizontală, deoarece ea reprezintă suma ariilor fâşiilor dreptunghiulare $[\,t_{k-1}, t_k\,]\times[\,0, f(\tau_k)\,]$, determinate de o diviziune Δ_n şi o alegere τ a punctelor intermediare. Intuitiv, aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma diviziunii este mai mică. Suntem conduşi astfel la următoarea definiţie:

Definiţie. *Funcţia* $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ *este* integrabilă Riemann *pe* $[\,a, b\,]$ *dacă există numărul* $I \in \mathbb{R}$*, notat* $I = \int_a^b f(t)dt$*, astfel înât:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \eta > 0\ \ a.\ \hat{\imath}.\ \forall \Delta_n\ \ cu\ \ \nu(\Delta_n) < \eta, |\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) - I| < \varepsilon,\ \ \forall \tau.$$

Dacă $I = \int_a^b f(t)dt$, se spune că sumele Riemann *au limita* I când norma diviziunilor tinde la 0, independent de modul de alegere a punctelor intermediare.

Se arată că o funcţie este integrabilă Riemann pe $[\,a, b,\,]$ dacă şi numai dacă este mărginită şi continuă aproape peste tot în $[\,a, b\,]$ (*criteriul lui Lebesgue*). Consecinţă: orice funcţie *continuă pe porţiuni*, adică continuă pe $[\,a, b\,]$ cu excepţia unui număr finit de puncte, este integrabilă. Proprietăţile integralei Riemann (liniaritate în raport cu integrandul, aditivitate în raport cu intervalul, etc.) sunt binecunoscute şi nu le mai amintim aici.

Este clar că pentru o funcţie $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$, integrala Riemann se defineşte ca limită a sumelor

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} u(\tau_k)\Delta t_k + i\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k,$$

iar f este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă u şi v sunt integrabile, caz în care

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (u(t) + iv(t))dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

§1.2. Integrala Riemann-Stieltjes. O generalizare imediată a integralei Riemann reale se obţine considerând acum două funcţii $f, g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ şi înlocuind sumele $\sigma_{\Delta_n}(f, \tau)$ din definiţia integralei Riemann din paragraful precedent cu *sumele Riemann-Stieltjes*

$$\sigma_{\Delta_n}(f, g, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta g(t_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})).$$

Obţinem astfel definiţia *integralei Riemann-Stieltjes*, notată

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t)dg(t).$$

Această integrală are multe proprietăţi asemănătoare integralei Riemann, dar şi unele specifice datorate considerării funcţiei g.

Continuitatea funcţiilor f şi g nu asigură existenţa integralei $I = \int_a^b f dg$, criteriul uzual fiind următorul: orice funcţie f continuă este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu orice funcţie g cu variaţie mărginită.

Amintim că o funcţie $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ este cu *variaţie mărginită* dacă există $M \geq 0$ astfel încât

$$\sum_k |\Delta g(t_k)| \leq M,$$

pentru orice diviziune Δ_n a intervalului $[\,a, b\,]$. Are loc următoarea caracterizare: o funcţie $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ este cu variaţie mărginită dacă şi numai dacă poate fi scrisă ca diferenţa a două funcţii monotone de acelaşi sens.

Este uşor de văzut că orice funcţie g lipschitziană este cu variaţie mărginită, în particular funcţiile de clasă C^1, caz în care integrala Riemann-Stieltjes se reduce la o integrală Riemann obişnuită

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

§1.3. Curbe rectificabile. Orice funcţie continuă $\gamma : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^2$ este *legea de mişcare* a unui *punct curent* $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Două legi de mişcare, $\gamma_k : [\,a_k, b_k\,] \to \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$, sunt echivalente dacă punctele lor curente trec prin aceleaşi locuri, în aceeaşi ordine şi tot de atâtea ori, mai precis: dacă există o schimbare de argument $t = \varphi(s)$, $s \in [\,a_2, b_2\,]$, $t \in [\,a_1, b_1\,]$, bijectivă, continuă şi strict crescătoare, astfel încât $\gamma_1(\varphi(s)) = \gamma_2(s)$, pentru orice $s \in [\,a_2, b_2\,]$.

Clasa de echivalenţă a unei legi de mişcare $\gamma = \gamma(t)$ o numim *curbă* (orientată) în plan, şi o vom nota, de obicei, tot cu γ. Spunem că $\gamma = \gamma(t)$ este o *parametrizare*, sau o *parcurgere* a curbei γ. Uneori, când nu există pericolul confuziei, notăm tot cu γ şi *suportul* curbei γ, dat de *traiectoria* oricărei parametrizări $\gamma = \gamma(t)$ a curbei, adică imaginea aplicaţiei $t \to \gamma(t)$, şi scriem

$\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Atenţie, două curbe distincte pot avea acelaşi suport, de exemplu, curba γ^- dată de parametrizarea $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$ este distinctă de curba γ dar are aceeaşi traiectorie ca γ, parcursă însă în sens invers. Vom spune că γ^- este *curba de sens opus* lui γ.

Capetele $A = \gamma(a)$ şi $B = \gamma(b)$ nu depind de parametrizarea curbei, spunem că A este punctul de plecare iar B punctul de sosire. Egalitatea $\gamma(a) = \gamma(b)$ defineşte o *curbă închisă*.

Numai continuitatea parametrizării $\gamma = \gamma(t)$ nu asigură *uni-dimensionalitatea* curbei γ. Există exemple celebre de curbe care trec prin toate punctele unui pătrat, deci a căror mulţime suport are arie nenulă, dintre aceste exemple unele vor fi prezentate într-un curs viitor: *curba lui Peano*, *curba lui Lebesgue* şi *curba lui Hilbert*.

În încercarea de a înlătura astfel de comportări stranii, vom cere ca $\gamma = \gamma(t)$ să fie un *homeomorfism*, adică o bijecţie bicontinuă, caz în care spunem că γ este o *curbă simplă*, o curbă fără autointersecţii. În general, imaginea în $\mathbb{R}^2$ a unui interval $[\,a, b\,]$ printr-un homeomorfism se numeşte *arc Jordan.* Orice arc Jordan este suportul a două curbe simple, corespunzătoare celor două sensuri de parcurs.

Imaginea homeomorfă a unui cerc se numeşte *curbă Jordan.* Dacă pe o curbă Jordan se fixează un punct A, există exact două curbe simple şi închise care pleacă din A şi ajung tot în A, corespunzătoare celor două sensuri de parcurs.

Teorema lui Jordan. *Orice curbă simplă şi închisă separă planul în două domenii şi este frontiera lor comună.*

Acest enunţ trebuie înţeles astfel: dacă $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ este o curbă Jordan, atunci mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ este compusă din exact două componente conexe, una mărginită, numită *domeniul interior al curbei* şi alta nemărginită, *domeniul exterior*, iar γ este frontiera fiecărui domeniu.

Fie $\gamma = \gamma(t)$ o parametrizare a unei curbe γ. Lungimea parcursului total al punctului curent poate fi aproximată cu suma

$$\ell_{\Delta_n}(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x(t_k))^2 + (\Delta y(t_k))^2},$$

în care Δ_n este o diviziune a lui $[\,a, b\,]$ cu norma suficient de mică, această sumă fiind egală cu lungimea liniei poligonale cu vârfurile $\gamma(t_k)$, luate în ordinea de parcurs.

Curba γ se numeşte *rectificabilă* dacă admite o parcurgere continuă pentru care sumele $\ell_{\Delta_n}(\gamma)$ sunt mărginite, caz în care *lungimea* lui γ,

$$\ell(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \ell_{\Delta_n}(\gamma) < +\infty.$$

Se arată că definiţia lui $\ell(\gamma)$ nu depinde parametrizarea aleasă.

Criteriul lui Jordan. *Curba* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *este rectificabilă dacă şi numai dacă funcţiile componente* $x = x(t)$ *şi* $y = y(t)$ *sunt cu variaţie marginită.*

Consecinţă: orice *curbă netedă pe porţiuni*, adică dată de o parametrizare γ continuă pe tot intervalul $[\,a,b\,]$ şi derivabilă pe (a,b) cu excepţia unui număr finit de puncte, este rectificabilă. Mai mult, în acest caz avem

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Exemplu. Fie $A=(-1,-1)$ şi $B=(1,1)$. Pe segmentul AB din plan vom defini următoarele parcurgeri de la A la B:

$$\gamma_1:[\,-1,1\,]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t)=(t,t),$$
$$\gamma_2:[\,0,1\,]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma_2(t)=(t^3,t^3),$$
$$\gamma_3:[\,-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\,]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma_3(t)=(\sin t,\sin t)$$

Este evident că parcurgerile γ_1 şi γ_2 sunt echivalente, ele definesc curba "segmentul AB parcurs o singură dată de la A la B", a cărei lungime poate fi calculată aşa

$$\int_{-1}^1\sqrt{t'^2+t'^2}dt=2\sqrt{2},$$

sau aşa

$$\int_{-1}^1\sqrt{(t^3)'^2+(t^3)'^2}dt=\int_{-1}^1\sqrt{18t^4}dt=3\int_{-1}^1 t^2dt=2\sqrt{2},$$

în timp ce γ_3 este o parcurgere a curbei "segmentul AB parcurs în ordinea $A\to B\to A\to B$", şi care are lungimea

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t+\cos^2 t}dt=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}|\cos t|dt=6\sqrt{2}.$$

În final, atragem atenţia că, deşi este frontiera unui domeniu mărginit, o curbă Jordan poate să nu aibe lungime finită, adică să nu fie rectificabilă, mai mult, există curbe Jordan care au arie nenulă, un exemplu celebru fiind curba lui Osgood.

§1.4. Integrala curbilinie de specia a II-a. În mecanică, pentru calcularea energiei necesare deplasării unui punct M sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$, s-a introdus noţiunea de *lucru mecanic*. Atunci când M parcurge un segment M_1M_2 sub acţiunea unei forţe constante, lucrul mecanic L este egal cu *produsul scalar* dintre vectorul $\vec{F}$ şi vectorul deplasare $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$,

$$L=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=|\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha.$$

În cazul general, când M parcurge o curbă γ din plan sub acţiunea unui câmp de forţe variabil, lucrul mecanic total se aproximează considerând pe curbă o succesiune finită de puncte, $\Delta=\{M_k\}$, cu norma $\nu(\Delta)=\max\|M_{k-1}M_k\|$ suficient de mică, şi înlocuind deplasarea de pe fiecare arc cu una rectilinie pe segmentul corespunător, efectuată sub acţiunea unei forţe constante $\vec{F}_k$, egală cu valoarea câmpului $\vec{F}$ într-un punct oarecare de pe acel arc. Notând câmpul de forţe cu

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

şi vectorul de poziţie al punctului $M_k(x_k, y_k)$ cu

$$\vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j},$$

obţinem aproximarea

$$L(\gamma) \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta L_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n} (P_k \Delta x_k + Q_k \Delta y_k).$$

Dacă deplasarea lui M are legea orară $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, cu $t \in [\,a,b\,]$, atunci orice diviziune $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ a intervalului $[\,a,b\,]$ determină o diviziune $\{M_k(x(t_k), y(t_k)\}$ pe curba γ, iar oricărei alegeri de puncte intermediare $\tau_k \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$ îi corespunde o alegere $\vec{F}_k = \vec{F}(x(\tau_k), y(\tau_k))$ pentru câmpul de forţe. Observăm că sumele

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x(t_k)$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \Delta y_k = \sum_{k=1}^{n} Q(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta y(t_k)$$

devin sume Riemann-Stieltjes pentru integralele

$$\int_a^b P(x(t), y(t))dx(t) \quad \text{şi} \quad \int_a^b Q(x(t), y(t))dy(t).$$

Suntem astfel conduşi spre următoarea

Definiţie. *Fie $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un câmp vectorial definit pe un domeniu D din $\mathbb{R}^2$, cu P şi Q continue, şi fie $\gamma \subset D$ o curbă dată de parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(t)$, cu $t \in [\,a,b\,]$. Prin integrala curbilinie* (*de specia a doua*)

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{not}{=} \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

întelegem următoarea sumă a două integrale Riemann-Stieltjes

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{def}{=} \int_a^b P(x(t), y(t))dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t))dy(t).$$

Pentru un câmp vectorial oarecare $\vec{F}$, cantitatea $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ este numită *circulaţia* lui $\vec{F}$ pe γ, şi, dacă $\vec{F}$ este o forţă, este egală cu lucrul mecanic efectuat pe γ.

În studiul integralei curbilinii, pentru a nu mai face referire la câmpuri vectoriale, se preferă să se asocieze integrala curbilinie direct unei *forme diferenţiale*, adică unei expresii de forma

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

definind

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{not}}{=} \int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy \overset{\text{def}}{=} \int_a^b P(x(t),y(t))dx(t)+\int_a^b Q(x(t),y(t))dy(t).$$

Pentru a asigura existenţa integralelor Riemann-Stieltjes implicate, cerinţa minimă pentru curba γ este să fie rectificabilă iar forma ω să fie de clasă C^0 pe D, altfel spus, componentele P şi Q să fie continue.

Se arată că valoarea integralei nu depinde de parametrizarea curbei γ, iar pentru o parametrizare de clasă C^1 calcul ei se reduce la integrala Riemann:

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

Alte proprietăţi: integrala curbilinie de specia a doua este aditivă în raport cu juxtapunerea curbelor:

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega,$$

îşi schimbă semnul la schimbarea sensului de parcurs

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega,$$

şi este liniară în raport cu integrandul:

$$\int_\gamma \alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2 = \alpha_1\int_\gamma \omega_1 + \alpha_2\int_\gamma \omega_2,\ \forall \alpha_{1,2}\in\mathbb{R}.$$

Din mecanică, se ştie că lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate, de exemplu, nu depinde de drum, adică este acelaşi pentru toate curbele care unesc două puncte date. În acest caz, spunem că lucrul mecanic este dat de o integrală *independentă de drum.* Deoarece integrala îşi schimbă semnul la schimbarea sensului de parcurgere a curbei, este clar că ea va fi independentă de drum dacă şi numai dacă

$$\int_\gamma \omega = 0,$$

pentru orice curbă rectificabilă închisă $\gamma \subset D$.

Tot din mecanică se ştie că această proprietate o au toate câmpurile de forţe $\vec{F}$ *conservative*, adică pentru care există un câmp scalar U, numit *potenţialul forţei*, astfel încât

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}.$$

Într-adevăr, în acest caz $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ şi $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, şi avem

$$L(\gamma) = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t)dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)).$$

În limbajul formelor diferenţiale, cazul conservativ de mai sus corespunde cazului când ω este o *formă diferenţială exactă*, adică atunci când admite o *primitivă* $\Omega = \Omega(x, y)$, de clasă C^1, astfel încât

$$\omega = d\Omega \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy,$$

caz în care

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\Omega = \Omega(x(b), y(b)) - \Omega(x(a), y(a)).$$

Reciproc, dacă pentru o formă $\omega = Pdx + Qdy$ integrala nu depinde de drum, atunci pentru orice pereche de puncte (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in D$ se poate nota cu

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

valoarea comună a integralei pe curbele γ care pleacă din (x_0, y_0) şi ajung în (x_1, y_1), şi se poate arăta destul de uşor că, pentru orice $(x_0, y_0) \in D$ fixat, funcţia

$$\Omega(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(\tilde{x}, \tilde{y})d\tilde{x} + Q(\tilde{x}, \tilde{y})d\tilde{y}$$

este o primitivă a formei $Pdx + Qdy$ definită pe o vecinătate a lui (x_0, y_0).

Pentru a găsi un criteriu care să asigure că forma $Pdx + Qdy$ este exactă, să observăm că în cazul în care Ω este o primitivă de clasă C^2, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

deoarece în acest caz derivatele mixte comută. Această condiţie caracterizează independenţa de drum a integralei curbilinii de specia a doua în cazul în care D este un domeniu *simplu conex*, adică un deschis conex D cu proprietatea că oricare două curbe având aceleaşi capete se pot obţine una din alta printr-o deformare continuă în D. Mai precis, are loc următorul rezultat:

Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex şi $P, Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1. Atunci, forma diferenţială $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ este exactă dacă şi numai dacă*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

pentru orice $(x, y) \in D$.

În concluzie, în cazul domeniilor simplu conexe, integrala unei formei diferenţiale $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ de clasă C^1 este independentă de drum dacă şi numai dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

§2. Integrale pentru funcţii complexe

Peste tot în cele ce urmează, vom considera că $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă definită pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, iar $\gamma \subset D$ o curbă rectificabilă.

§2.1. Integrala scalară. Amintim că în $\mathbb{C}$ am definit *produsul scalar* a două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ prin

$$z_1 \cdot z_2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}(\, z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_1||z_2| \cos\theta,$$

unde $\theta = \arg z_2 - \arg z_1$, şi el corespunde produsului scalar dintre vectorii de poziţie ai punctelor $z_{1,2}$ din plan.

Interpretând funcţia complexă $f = u + iv$ ca un câmp de forţe în plan, lucrul mecanic efectuat de f pe curba γ de ecuaţie $z(t) = x(t) + iy(t)$ se calculează, după cum ştim, cu integrala curbilinie de specia a doua

$$L(\gamma) = \int_\gamma udx + vdy,$$

care este limita sumelor Riemann-Stieltjes

$$\sum_k f(z(\tau_k)) \cdot \Delta z(t_k) = \sum_k u(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x(t_k) + \sum_k v(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta y(t_k),$$

asociate diviziunilor $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ şi punctelor intermediare (τ_k). Suntem conduşi spre următoarea noţiune:

Definiţie. *Numărul real I, dat de integrala curbilinie de specia a doua*

$$I = \int_\gamma udx + vdy,$$

se numeşte integrala scalară *a funcţiei complexe $f = u + iv$ pe curba γ, şi se notează cu*

$$\int_\gamma f \cdot dz \overset{not.}{=} I.$$

Proprietăţile integralei scalare ale unei funcţii complexe sunt exact cele ale integralei curbilinii de specia a doua, dintre care reamintim: pentru orice funcţie continuăf şi orice curbă rectificabilă γ, integrala scalară $\int_\gamma f \cdot dz$ există, iar dacă $\gamma = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\,a, b\,]$, este de clasă C^1, atunci

$$\int_\gamma f \cdot dz = \int_a^b (ux' + vy')dt.$$

Această egalitate justifică următorul calcul formal:

$$z \in \gamma \;\to\; z(t) = x(t) + iy(t) \;\to\; dz = dx + idy = x'dt + iy'dt$$

şi, prin urmare

$$\int_\gamma f \cdot dz = \int_\gamma (u + iv) \cdot (dx + idy) = \int_a^b (ux' + vy')dt.$$

Mai mult, cu această definiţie a lui dz, produsul scalar $f \cdot dz$ devine chiar forma diferenţială

$$f \cdot dz = u\,dx + v\,dy.$$

Integrala $\int_\gamma f \cdot dz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă $\int_\gamma f \cdot dz = 0$ pentru orice curbă închisă $\gamma \subset D$.

O altă caracterizare: integrala $\int_\gamma f \cdot dz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă forma diferenţială $f \cdot dz$ admite primitive, adică există Ω de clasă C^1 astfel încât

$$d\,\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,dy = u\,dx + v\,dy = f \cdot dz.$$

În cazul domeniilor simplu conexe, dacă u şi v sunt de clasă C^1, integrala scalară

$$\int_\gamma f \cdot dz = \int_\gamma u\,dx + v\,dy$$

este independentă de drum dacă şi numai dacă $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

§2.2. Integrala complexă. Vom defini acum integrala complexă a funcţiei $f = u + iv$ pe curba γ de ecuaţie $z = z(t)$, $t \in [\,a, b\,]$, înlocuind produsul scalar din suma Riemann-Stieltjes

$$\sum_k f(z(\tau_k)) \cdot \Delta z(t_k)$$

care apare în definiţia integralei scalare, cu produsul a două numere complexe:

$$\sum_k f(z(\tau_k))\Delta z(t_k) = \sum_k (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_k (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k),$$

unde am notat cu $u_k = u(x(\tau_k), y(\tau_k))$, $\Delta x_k = \Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_{k-1})$ şi analog pentru v şi y.

Definiţie. *Numărul complex $I + iJ$, dat de integralele curbilinii de specia a doua*

$$I = \int_\gamma u\,dx - v\,dy \;\; \text{şi} \;\; J = \int_\gamma v\,dx + u\,dy,$$

se numeşte integrala *funcţiei complexe $f = u + iv$ pe curba γ, şi se notează cu*

$$\int_\gamma f\,dz \overset{not.}{=} I + iJ.$$

Să observăm că cele două integrale curbilinii reale, I şi J, din definiţia mai sus, pot fi scrise ca integrale scalare pentru funcţiile $\bar{f} = u - iv$ şi $i\bar{f} = v + iu$:

$$I = \int_\gamma \bar{f} \cdot dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy \text{ şi } J = \int_\gamma i\bar{f} \cdot dz = \int_\gamma v\,dx + u\,dy,$$

astfel că avem egalitatea:

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma \bar{f} \cdot dz + i \int_\gamma i\bar{f} \cdot dz$$
care reduce integrala complexă la două integrale scalare.

Exemplu. Fie $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$ cercul unitate. Calculăm direct cu definiţia:
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_\gamma \left(\frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} \right) dz$$
$$= \int_\gamma \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2+y^2} + i \int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2} =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{-\cos t \sin t + \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt + i \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 2\pi i.$$

Să observăm că, în cazul unei curbe netede $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\,a, b\,]$, cu x şi y de clasă C^1, din proprietăţile integralei Riemann-Stieljes rezultă egalitatea
$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i \int_a^b (vx' + uy')dt$$
care poate fi regăsită prin următorul calcul formal:
$$z \in \gamma \;\to\; z(t) = x(t) + iy(t) \;\to\; dz = dx + idy = (x' + iy')dt$$
de unde
$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_a^b [(ux' - vy') + i(vx' + uy')]dt.$$

Exemplu. Calculăm din nou integrala funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{z}$ pe cercul unitate, $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, folosind acum: $z = e^{it} \;\to\; dz = ie^{it}dt$. Avem:
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i.$$

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă, $f = u + iv$. Studiem acum existenţa unei primitive a funcţiei $f = u + iv$, adică a unei funcţii olomorfe $F = U + iV$ astfel încât $F' = f$. Conform condiţiilor Cauchy-Riemann scrise sub formă matriceală, $F' = f$ dacă şi numai dacă
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix},$$
adică
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy = u\, dx - v\, dy = \bar{f} \cdot dz,$$
şi
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy = v\, dx + u\, dy = i\bar{f} \cdot dz.$$

Obţinem că f admite primitive dacă şi numai dacă formele diferenţiale $\bar{f} \cdot dz$ şi $i\bar{f} \cdot dz$ sunt exacte, deci dacă şi numai dacă integrala complexă $\int_\gamma f(z)\,dz$ este independentă de drum. Sintetizăm aceste rezultate astfel:

Teoremă. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$. Dacă f admite primitiva F, atunci pentru orice curbă $\gamma \subset D$,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

În particular, dacă γ este o curbă închisă, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Reciproc, dacă $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pentru orice curbă închisă $\gamma \subset D$, atunci f admite primitive. Mai mult, în acest caz, integrala $\int_\gamma f(z)dz$ este independentă de drum şi, pentru orice $z_0 \in D$ fixat,

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

este unica primitivă a lui f pentru care $F(z_0) = 0$.

Exemplu. Aplicând regulile de derivare, vedem că $f(z) = z^2$ are ca primitivă funcţia $F(z) = \frac{z^3}{3}$ definită pe $\mathbb{C}$, iar $f(z) = z^{-2}$ are ca primitivă $F(z) = \frac{z^{-1}}{-1}$, definită pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dacă pe un domeniu D există o determinare a logaritmului, $F(z) = \ln z$, atunci aceasta este o primitivă a funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{z}$ şi, prin urmare,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0,$$

pentru orice γ curbă închisă din D.

Deoarece

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0,$$

rezultă că nu există nici o determinare a logaritmului definită pe tot domeniul $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema fundamentală a lui Cauchy. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu f' continuă pe D. Atunci, pe orice curbă rectificabilă şi închisă $\gamma \subset D$,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că, în ipotezele teoremei, cele două integralele scalare din egalitatea

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma \bar{f} \cdot dz + i \int_\gamma i\bar{f} \cdot dz,$$

sunt independente de drum. Domeniul D fiind simplu conex, prima integrală este independentă de drum dacă

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x},$$

iar a doua dacă

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

adică exact condiţiile Cauchy-Riemann satisfăcute de funcţia olomorfă $f = u+iv$.