Punctul Fermat-Torricelli

Prezentăm aici o problemă celebră de geometrie plană, şi anume cea propusă spre rezolvare, pe la 1650, de Pierre de Fermat lui Evangelista Torricelli, care a rezolvat-o prin mai multe metode.

Problema lui Fermat. *Fiind dat un triunghi ΔABC într-un plan π, să se determine un punct Q în plan pentru care suma distanţelor la vâfurile triunghiului este minimă*:

$$QA + QB + QC = \min_{P \in \pi}\{PA + PB + PC\}.$$

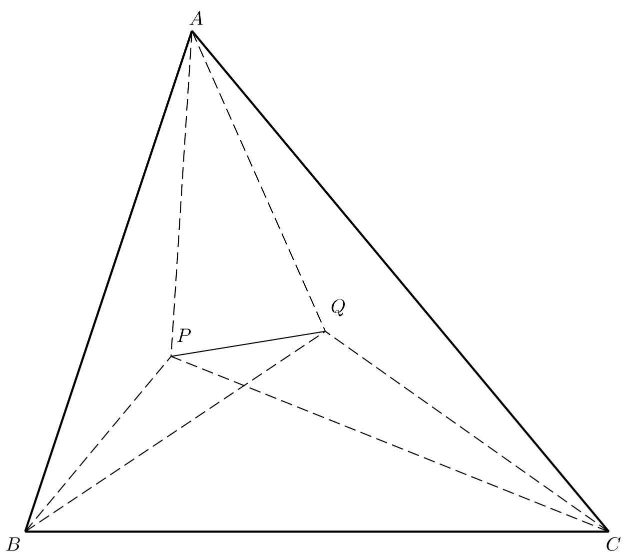

Figure 1: Punctul lui Fermat

Soluţie. Vom da o rezolvare folosind numere complexe. Amintim definiţia şi proprietăţile produsului scalar în $\mathbb{C}$: dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

$$< z_1, z_2 >= x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2}(\, z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_1||z_2| \cos \widehat{z_1Oz_2}.$$

Pentru orice $z \neq 0$ vom nota cu u_z versorul său, dat de relaţia

$$u_z = \frac{1}{|z|} z.$$

Este evident că u_z este un număr complex de modul unu, fiind chiar punctul de intersecţie al razei vectoare Oz cu cercul trigonometric. Din definiţie avem $z = |z| u_z$, prin urmare

$$< z, u_z >=< |z| u_z, u_z >= |z| < u_z, u_z >= |z||u_z|^2 = |z|.$$

Fie P şi Q două puncte oarecare în plan, cu afixele notate z_P şi z_Q. Notăm cu u_{QA} versorul diferenţei $z_A - z_Q$. Avem

$$QA = |z_A - z_Q| =< z_A - z_Q, u_{QA} >=< z_A - z_P, u_{QA} > + < z_P - z_Q, u_{QA} >$$

$$\leq |z_A - z_P||u_{QA}| + < z_P - z_Q, u_{QA} >$$

Am arătat că

$$QA \leq PA + < z_P - z_Q, u_{QA} >$$

şi, analog pentru celelalte vârfuri, avem

$$QB \leq PB + < z_P - z_Q, u_{QB} >$$

$$QC \leq PC + < z_P - z_Q, u_{QC} > .$$

Aşadar, pentru un Q fixat arbitrar, avem inegalitatea

$$QA + QB + QC \leq PA + PB + PC + < z_P - z_Q, u_{QA} + u_{QB} + u_{QC} >,$$

pentru orice P din plan. Este clar că, dacă

$$u_{QA} + u_{QB} + u_{QC} = 0,$$

atunci

$$QA + QB + QC = \min_{P \in \pi} \{PA + PB + PC\}.$$

Este uşor de văzut că suma a trei numere complexe de modul unu este zero numai dacă împart cercul trigonometric în trei arce de $120°$, rezultă că versorii segmentelor QA, QB şi QC fac între ei unghiuri de $120°$, prin urmare am demonstrat că punctul de minim căutat, *punctul lui Fermat*, este chiar *centrul izogonal* al triunghiului, adică punctul Q cu proprietatea

$$\widehat{BQC} = \widehat{CQA} = \widehat{AQB} = 120°.$$

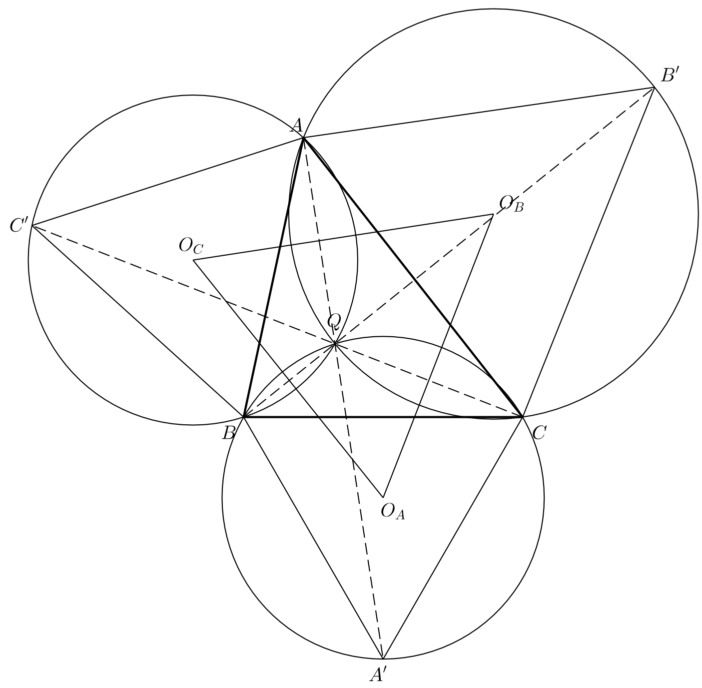

Figure 2: Punctul lui Toricelli.

Existenţa centrului izogonal este stabilită de următoarea problemă:

Problema lui Torricelli. *Fiind dat un triunghi ΔABC, se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $\Delta AC'B$, $\Delta BA'C$ şi $\Delta CB'A$. Arătaţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente într-un punct (numit punctul lui Torricelli) care este chiar centrul izogonal al triunghiului dat.*

Soluţie. Vom da, pentru eleganţa ei, o rezolvare geometrică. Notăm cu $\mathscr{C}(\Delta AC'B)$, $\mathscr{C}(\Delta BA'C)$ şi $\mathscr{C}(\Delta CB'A)$ cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale, şi notăm cu O_C, O_A şi, respectiv, O_B centrele lor.

Cercurile $\mathscr{C}(\Delta AC'B)$ şi $\mathscr{C}(\Delta CB'A)$ se intersectează în două puncte, unul este A iar pe celălalt îl notăm cu Q. Vom arăta, pentru început, că punctul Q, astfel definit, este centrul izogonal.

Patrulaterul $AC'BQ$ este inscriptibil cu $\widehat{C'} = 60°$, rezultă că $\widehat{AQB} = 120°$. Analog, din patrulaterul inscriptibil $AB'CQ$ rezultă $\widehat{AQC} = 120°$. Prin urmare $\widehat{BQC} = 360° - 120° - 120° = 120°$, deci

$$\widehat{BQC} = \widehat{CQA} = \widehat{AQB} = 120°.$$

Mai mult, să observăm că $\widehat{BQC} + \widehat{BA'C} = 120° + 60° = 180°$, deci şi patrulaterul $BA'CQ$ este inscriptibil, prin urmare Q aparţine şi cercului $\mathscr{C}(\Delta BCA')$.

Vom arăta acum că punctele A, Q şi A' sunt coliniare. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$\widehat{AQA'} = \widehat{AQB} + \widehat{BQA'} = 120° + 60° = 180°.$$

Aici am folosit faptul că Q se află pe cercul circumscris triunghiului echilateral $\Delta BCA'$

Analog se arată şi coliniarităţile $B - Q - B'$ şi $C - Q - C'$.

Observaţie. Este uşor de văzut că triunghiul $\Delta A'BA$, rotit cu $60°$ în jurul lui B, se suprapune peste $\Delta CBC'$. Urmează că segmentele AA' şi CC' au aceeaşi lungime, egală şi cu lungimea lui BB', desigur.

În final, să rezolvăm şi

Problema lui Napoleon. *Arătaţi că triunghiul $\Delta O_A O_B O_C$, format de centrele celor trei triunghiuri echilaterale, este la rândul său un triunghi echilateral.*

Soluţie. Rezolvarea este imediată[1]: latura $O_A O_B$, de exemplu, este *linia centrelor* cercurilor $\mathscr{C}(\Delta BA'C)$ şi $\mathscr{C}(\Delta CB'A)$, iar linia centrelor este perpendiculară pe secanta comună, CQ. Am arătat astfel că laturile triunghiului $\Delta O_A O_B O_C$ sunt perpendiculare pe dreptele QA, QB, şi QC, iar cum acestea fac între ele unghiuri de $120°$ urmează că laturile lui $\Delta O_A O_B O_C$ fac între ele unghiuri de $60°$.

[1] cu numere complexe: `https://ro.wikipedia.org/wiki/Teorema_lui_Napoleon`