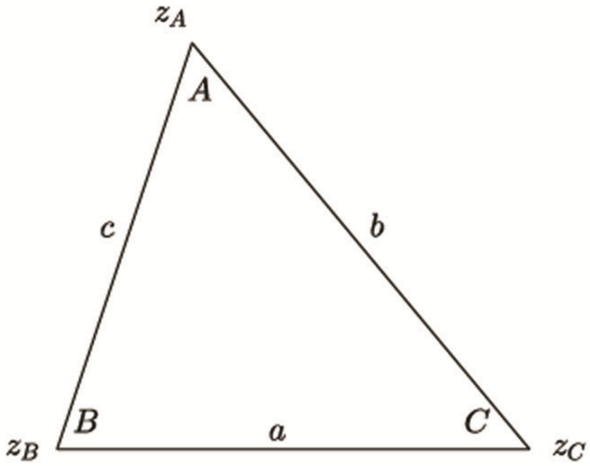
Tema 6

Triunghiuri şi rapoarte complexe.

Ne vom ocupa, în cele ce urmează, de problema triangulaţiei topografice: fiind cunoscute poziţiile a două puncte, B şi C, punctele care formează *baza* de triangulaţie, se cere să se determine poziţia punctului A, punctul nou, măsurând anumite elemente ale triunghiului ΔABC.



Pentru a utiliza notaţiile consacrate din geometria triunghiului, vom nota aici cu z_A, z_B şi z_C afixele vârfurilor triunghiului ΔABC, cu a, b şi c lungimile laturilor BC, CA şi AB, iar cu A, B şi C mărimea unghiurilor triunghiului, măsurată în radiani şi cuprinsă strict în intervalul $(0, \pi)$.

Cu numere complexe avem relaţiile:

$$a = |z_C - z_B|, \qquad b = |z_A - z_C|, \;\; c = |z_B - z_A|$$

şi

$$A = |\arg\, \omega_A|, \qquad B = |\arg\, \omega_B|, \qquad C = |\arg\, \omega_C|,$$

unde am notatcu ω_A, ω_B şi ω_C rapoartele

$$\omega_A = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}, \qquad \omega_B = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}, \qquad \omega_C = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C},$$

pe care le vom numi în continuare *rotori.* Denumirea este justificată de formula de calcul

$$z_A = z_B + \omega_B(z_C - z_B),$$

de exemplu, care spune că punctul A se obţine din punctul C printr-o rotaţie în jurul lui B de unghi egal cu argumentul lui ω_B şi o scalare de mărime cât modulul lui ω_B.

În clasa `Complex` avem următoarele implementări ale mărimilor precizate mai sus:

```
Complex i = new Complex(0, 1);
Complex zA = 1 + i, zB = -1 + 2 * i, zC = 2 - i;
double a = (zC - zB).Ro, b = (zA - zC).Ro, c = (zB - zA).Ro;
Complex omegaA = (zC - zA) / (zB - zA), omegaB=...
double A = Math.Abs(omegaA.Theta), B=...
```

Cazul bază-unghi-latură. Începem cu cazul cel mai simplu, cel numit în topografie *radiere*: fiind date punctele de bază z_Bşi z_C, se cere să se afle z_A cunoscând unghiul B şi lungimea c. Rezolvarea este imediată, deoarece rotorul vârfului B este gata determinat:

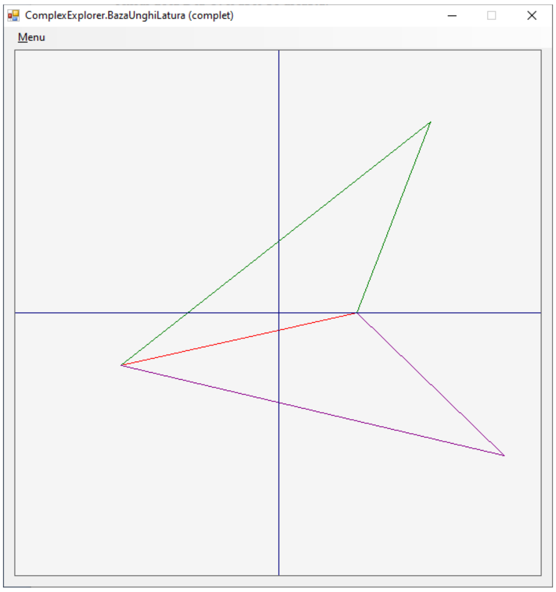
$$|\omega_B| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \frac{c}{a}, \quad \arg \omega_B = B,$$

şi prin urmare z_A se calculează cu relaţia

$$z_A = z_B + \omega_B(z_C - z_B).$$

Următorul program construieşte de două ori triunghiul ΔABC, prima dată pe stânga bazei când aceasta este parcursă în sensul de la B la C, şi apoi pe dreapta:

```
public class BazaUnghiLatura : ComplexForm
{
    Complex i = new Complex(0, 1);
    void bazaUnghiLatura(Complex zB, Complex zC, double B,
                                  double c, out Complex zA, bool peStg = true)
    {
        if (!peStg) B *= -1;
        double a = (zC - zB).Ro;
        Complex omegaB = Complex.setRoTheta(c / a, B);
        zA = zB + omegaB * (zC - zB);
    }

    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-5, 5, -5, 5);
        ScreenColor = Color.WhiteSmoke;
        PenColor = Color.Navy;
        Complex zB = -3 - i, zC = 1.5 , zA;
        double B = Math.PI / 7;
        double c = 7.5;
        setLine(zB, zC, Color.Red);
        bazaUnghiLatura(zB, zC, B, c, out zA);
        setLine(zB, zA, Color.Green);
        setLine(zC, zA, Color.Green);
        bazaUnghiLatura(zB, zC, B, c, out zA, false);
        setLine(zB, zA, Color.DarkMagenta);
        setLine(zC, zA, Color.DarkMagenta);
        setAxis();
        resetScreen();
    }
}
```



Observaţi că în metoda **bazaUnghiLatura()** parametrul **peStg** are setată valoarea implicită **true**, deci la apelare este necesar să fie precizat numai dacă dorim să aibă valoarea **false**, iar parametrul **zA** este declarat ca parametru de ieşire, cu **out**, ceea ce înseamnă că este primit prin referinţă iar metoda noastră trebuie neaparat să-i atribuie o valoare.

Exerciţiul 1. Puneţi în evidenţă locul geometric al vârfului A al triunghiului ΔABC, atunci când baza BC este fixă, iar unghiul B şi lungimea c variază după legea:

$$\begin{cases} c = t, \\ B = \arccos\dfrac{1}{t} \end{cases} \qquad t \in (1, +\infty).$$

Justificaţi rezultatul observat.

Cazul bază-unghi-unghi. Considerăm cazul când se cunoaşte baza şi unghiurile B şi C de la baza triunghiului. Evident că şi unghiul A este cunoscut, $A = \pi - (B + C)$. Pentru determinarea vârfului A se poate folosi rotorul oricărui vârf al triunghiului, noi îl preferăm, pentru uniformitatea prezentării, tot pe $\omega_B = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Acum, pentru a-i calcula modulul, avem nevoie de *Teorema sinusurilor*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Prin urmare numărul complex ω_B este determinat din relaţiile

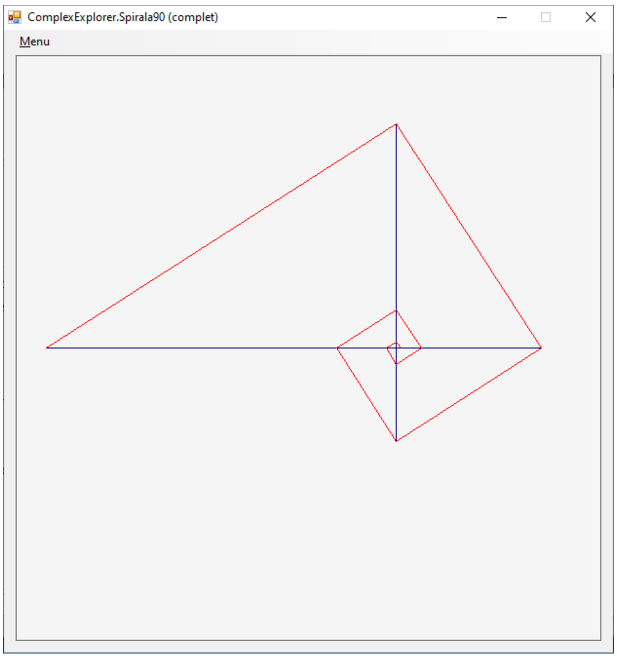
$$|\omega_B| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \ \arg \omega_B = B,$$

iar z_A se calculează cu tot relaţia $z_A = z_B + \omega_B(z_C - z_B)$.

Exerciţiul 2. Implementaţi metoda

```
public void bazaUnghiUnghi(Complex zB, Complex zC, double B,
                      double C, out Complex zA, bool peStg = true)
        {
            if (!peStg) B *= -1;
            Complex omegaB = ...
            zA = zB + omegaB * (zC - zB);
        }
```

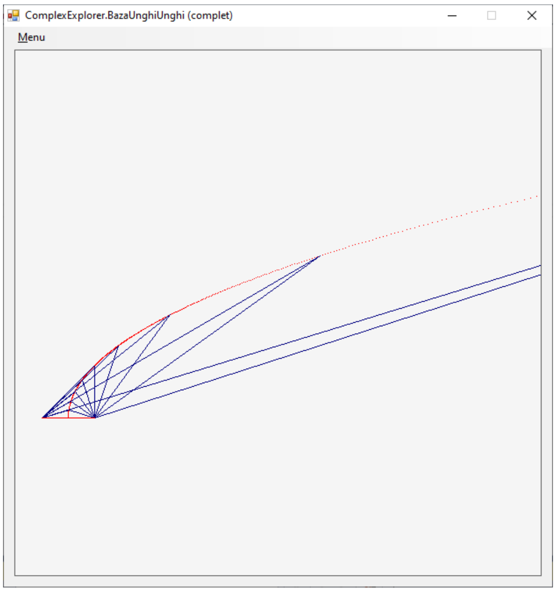
care determină, din datele prezentate, cele două poziţii posibile ale vârfului A. Utilizaţi acestă metodă pentru a desena următorul şir de triunghiuri dreptunghice, toate cu aceleaşi unghiuri:



Exercițiul 3. Punctele B şi C fiind fixate în mod arbitrar, puneţi în evidenţă, în fiecare dintre cazurile următoare, locul geometric al vârfului A al triunghiului ΔABC când măsura unghiurilor B şi C variază după legea

$$a)\ \begin{cases} B = 2t \\ C = \dfrac{\pi}{2} - t, \end{cases} \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \qquad b)\ \begin{cases} B = \dfrac{\pi}{3} + t \\ C = \dfrac{\pi}{3} - t, \end{cases} \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right);$$

$$c)\ \begin{cases} B = \arctan(3\,t) \\ C = \arctan(2\,t), \end{cases} \qquad t \in (0, +\infty); \quad d)\ \begin{cases} B = \arctan(\sin t) \\ C = t, \end{cases} \qquad t \in (0, \pi).$$



Cazul bază-latură-latură. Considerăm, în final, cazul când sunt date vârfurile B şi C şi se cunosc lungimile b şi c. Evident că şi latura a este cunoscută, $a = |z_C - z_B|$. Folosim, de exemplu, iarăşi rotorul $\omega_B = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Acum modulul este cunoscut:

$$|\omega_B| = \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \frac{c}{a}$$

iar argumentul se determină din *Teorema cosinusului*:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

Prin urmare

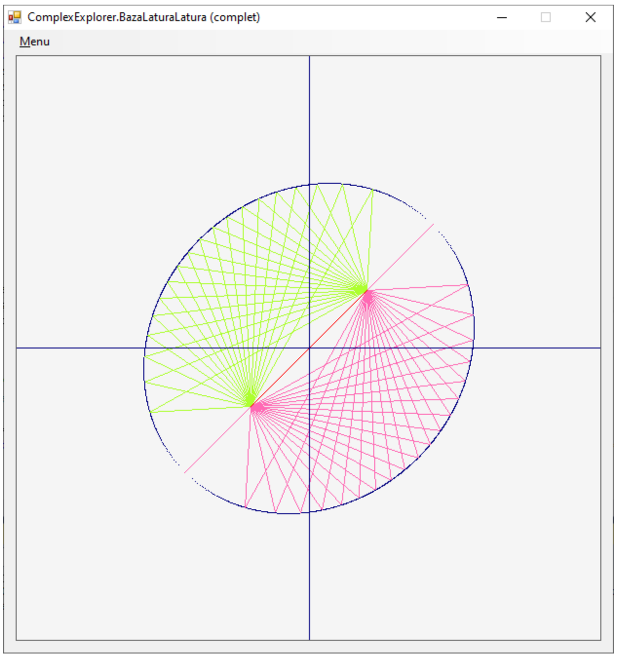
$$\arg \omega_B = B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

iar $z_A = z_B + \omega_B(z_C - z_B)$.

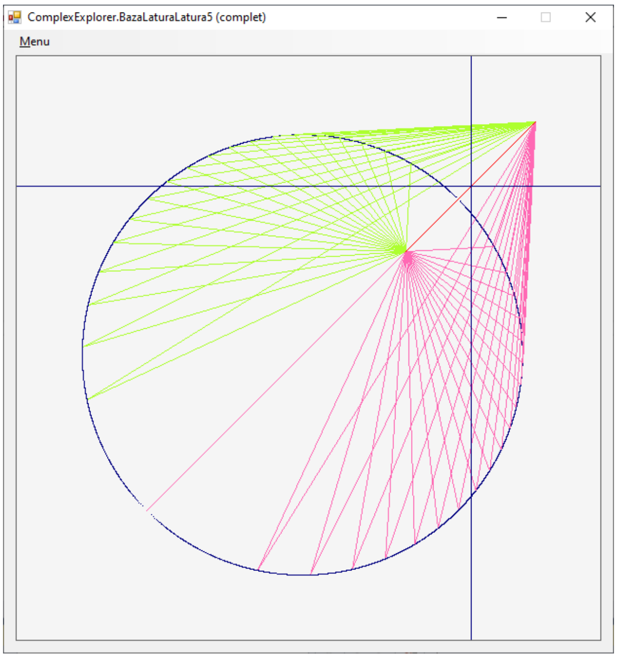
Exercițiul 4. Implementați metoda

```
public void bazaLaturaLatura(Complex zB, Complex zC, double b,
                             double c, out Complex zA, bool peStg = true) { ...  }
```

care determină, din datele prezentate mai sus, cele două poziții posibile ale vârfului *A* și puneți în evidență locul geometric al punctului z_A în cazul în care $z_B = -1 - i,\ z_C = 1 + i,$ iar lungimile *b* și *c* variază după legea: $\begin{cases} b = 3 + t \\ c = 3 - t, \end{cases} \quad t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$



Exercițiul 5. Același enunț ca mai sus, cu altă lege de variație: $\begin{cases} b = 3t \\ c = 2t, \end{cases} \quad t \in \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, 2\sqrt{2}\right).$



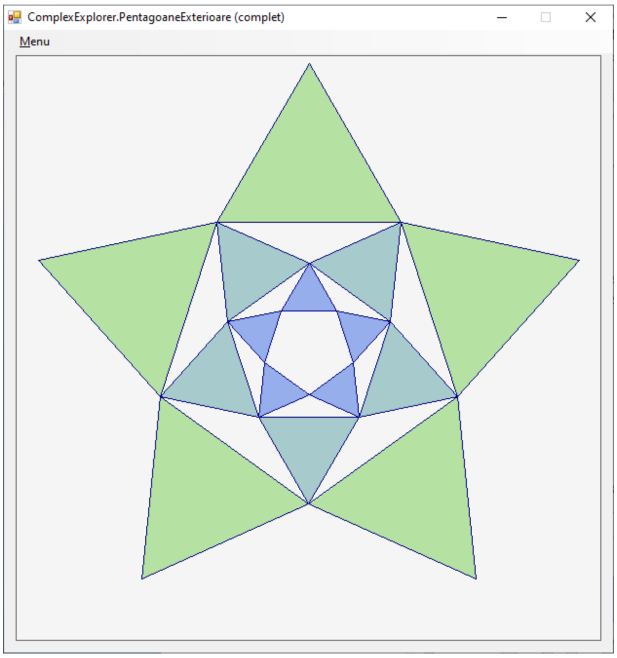
Cazul triunghiului isoscel. Dacă triunghiul ΔABC este isoscel, cu $AB \equiv AC$, atunci este mai elegant să folosim rotorul vârfului A, deoarece acesta este un număr complex unitar,

$$|\omega_A| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1,$$

prin urmare produsul cu ω_A reprezintă o rotaţie de unghi A, fără scalare. Afixul z_A al apexului A se determină din definiţia rotorului $\omega_A = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, şi obţinem

$$z_A = \frac{z_C - \omega_A z_B}{1 - \omega_A}.$$

Exerciţiul 6. Desenul următor a fost obţinut construind triunghiuri echilaterale pe exteriorul laturilor pentagonului interior şi repetând construcţia pentru pentagonul exterior obţinut:

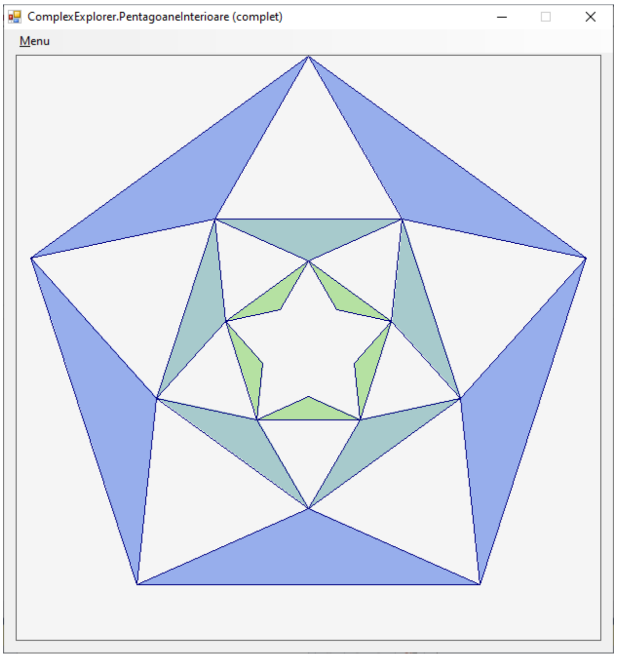


Studiaţi codul clasei care a realizat acest desen:

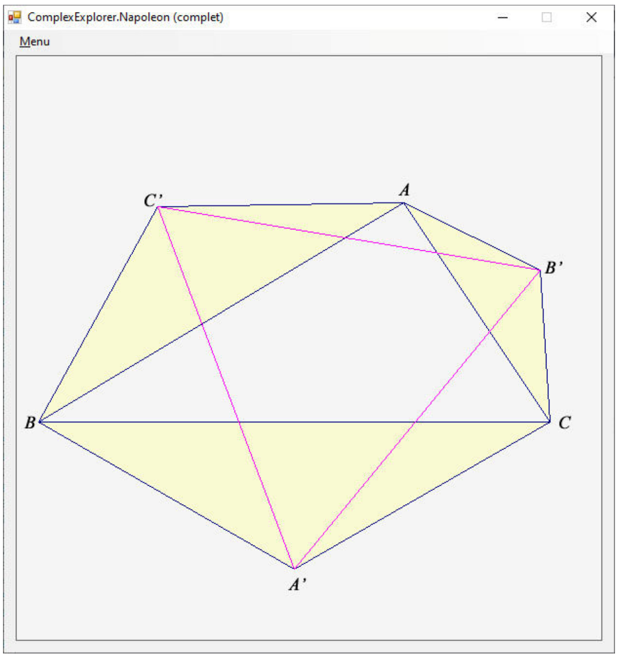
```
class PentagoaneExterioare : ComplexForm
{
    void bazaApex(Complex zB, Complex zC, double A,
                                 out Complex zA, bool peStg = true)
    {   //calculeaza apexul zA al triunghiului isoscel zB zA zC
        Complex omegaA = Complex.setRoTheta(1, A);
        if (!peStg) omegaA = omegaA.conj;
        zA = (zC - omegaA * zB) / (1 - omegaA);
    }
    void traseazaTriunghi(Complex zA, Complex zB, Complex zC, Color col)
    {
        setLine(zA, zB, col);
        setLine(zB, zC, col);
        setLine(zC, zA, col);
    }
```

```
    bool esteInTriunghi(Complex z, Complex zA, Complex zB, Complex zC)
    {
        double s = ((zB - z) / (zA - z)).Theta + ((zC - z) / (zB - z)).Theta
                                                + ((zA - z) / (zC - z)).Theta;
        return Math.Abs(s) > 0.5;
    }

    void umpleTriunghi(Complex zA, Complex zB, Complex zC, Color col)
    {
        for (int ii = 0; ii <= imax; ii++)
        {
            for (int jj = 0; jj <= jmax; jj++)
            {
                Complex z = getZ(ii, jj);
                if (esteInTriunghi(z, zA, zB, zC)) setPixel(ii, jj, col);
            }
        }
    }

    void transformaPoligon(ref Complex[] p, Color col)
    {   //pentagonul p trece in pprim
        int N = p.Length - 1;
        Complex[] pprim = new Complex[N + 1];
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            bazaApex(p[k], p[k + 1], Math.PI / 3, out pprim[k], false);
            umpleTriunghi(p[k], p[k + 1], pprim[k], col);
            traseazaTriunghi(p[k], p[k + 1], pprim[k], PenColor);
        }
        pprim[N] = pprim[0];
        p = pprim;
    }
    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-10, 10, -10, 10);
        ScreenColor = Color.WhiteSmoke;
        PenColor = Color.Navy;

        int N = 5;
        Complex[] pInterior = new Complex[N + 1];
        double delta = 2 * Math.PI / N;
        Complex q = 0;
        Complex a = new Complex(0, -1.6);

        //incarcam in tabloul p pentagonul cu centru q si primul varf a
        for (int k = 0; k <= N; k++)
        {
            pInterior[k] = q + Complex.setRoTheta(1, k * delta) * (a - q);
        }

        //repetam constructia de trei ori
        for (int kol = 0; kol < 3; kol++)
        {
            transformaPoligon(ref pInterior, getColor(100 + 20 * kol));
            resetScreen();
        }
    }
}
```

Încercaţi să modificaţi acest program astfel încât să obţineţi desenul următor, în care s-a pornit de la pentagonul exterior şi s-au construit triunghiuri isoscele pe interiorul laturilor, apoi s-a repetat construcţia pentru pentagonul nou obţinut:



Exerciţiul 7. Desenaţi şi rezolvaţi *problema lui Napoleon* : pe fiecare latură a unui triunghi oarecare ΔABC construieşte în exterior câte un triunghi isoscel cu unghiul de la vârf de $120°$ şi cu baza pe latura triunghiului dat. Cu notaţiile din figura următoare, arătaţi că triunghiul $\Delta A'B'C'$ este echilateral.



Indicaţie: Folosim rotorul $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ şi avem $z_{B'} = \frac{1}{1-\omega}(z_A - \omega z_C)$ şi celelalte. Folosind relaţiile $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ obţinem $z_{C'} - z_{B'} = \frac{1}{1-\omega}(\omega^2 z_A + \omega z_C + z_B)$, etc.

Exerciţiul 8. Ilustraţi următorul caz al *Teoremei Petr–Douglas–Neumann*: pe laturile unui pentagon convex oarecare construim în exterior triunghiuri isoscele cu unghiul de la vârf de $\frac{2\pi}{5}$ radiani. Vârfurile acestor triunghiuri formează un alt pentagon pe care construim iarăşi triunghiuri isoscele, acum cu unghiul de la vârf de $\frac{4\pi}{5}$ radiani. Mai repetăm o dată construcţia cu unghiul de la vârf de $\frac{6\pi}{5}$ radiani. Arătaţi că ultimul pentagon este un pentagon regulat.

Link: https://en.wikipedia.org/wiki/Petr%E2%80%93Douglas%E2%80%93Neumann_theorem