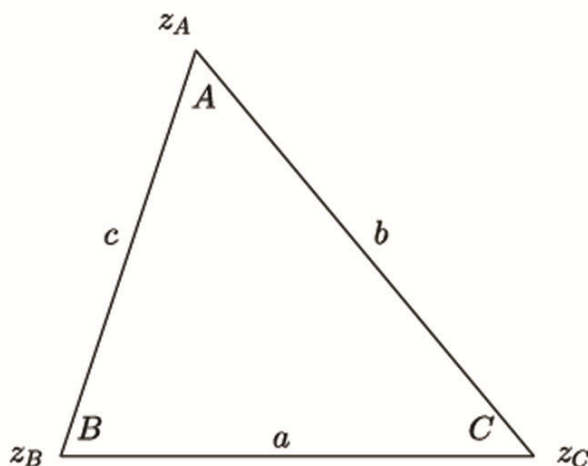


Tema 7

Puncte importante în triunghi

Ne vom ocupa aici de punctele remarcabile întâlnite în geometria triunghiului: centru de greutate G , centrul cercului circumscris O , etc.



Vom nota și acum cu z_A , z_B și z_C afixele vârfurilor triunghiului ΔABC , cu a , b și c lungimile laturilor BC , CA și AB , iar cu A , B și C mărimea unghiurilor triunghiului, măsurată în radiani și cuprinsă strict în intervalul $(0, \pi)$.

Amintim că numerele reale α , β și γ formează un set de coordonate baricentrice omogene pentru un punct Q din planul triunghiului ΔABC dacă afixul său se calculează cu relația

$$z_Q = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Pentru a afla cum se determină aceste coordonate, vezi tutorialul *Coordonate baricentrice*.

Exercițiul 1. Centrul cercului circumscris triunghiului. Următorul program pune în evidență punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor unui triunghi care, după cum se știe, este punctul O , centrul cercului circumscris:

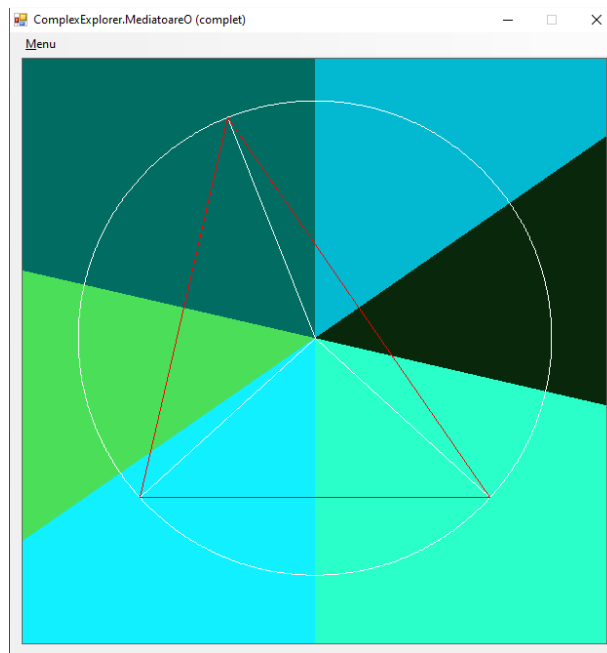
```
public class Mediatoare : ComplexForm
{
    Complex i = new Complex(0, 1);
    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(0, 10, 0, 10);
        Complex zA = 2 + 2.5 * i;
        Complex zB = 8 + 2.5 * i;
        Complex zC = 3.5 + 9 * i;
    }
}
```

```

for (int ii = imin; ii <= imax; ii++)
{
    for (int jj = jmin; jj <= jmax; jj++)
    {
        Complex z = getZ(ii, jj);
        double la = (z - zA).Ro;
        double lb = (z - zB).Ro;
        double lc = (z - zC).Ro;
        int k = 0;
        //k = Convert.ToInt32((Math.Abs(la + lb + lc)));
        if (la < lb) k += 1;
        if (lb < lc) k += 2;
        if (lc < la) k += 4;
        setPixel(ii, jj, getColor(600 + 50 * k));
    }
}
Color col = Color.Red;
setLine(zA, zB, col);
setLine(zB, zC, col);
setLine(zC, zA, col);
resetScreen();
}
}
/*****

```

Completați codul astfel încât să apară cercul circumscris triunghiului și razele OA , OB și OC :



Indicație: Metoda I. Avem $z_O = (\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C) / (\alpha + \beta + \gamma)$ unde ponderile α , β și γ sunt date de relațiile

$$\alpha = a^2(b^2 + c^2 - a^2), \quad \beta = b^2(c^2 + a^2 - b^2), \quad \gamma = c^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

sau de relațiile

$$\alpha = \sin 2A, \quad \beta = \sin 2B, \quad \gamma = \sin 2C.$$

Metoda a II-a. Se folosește triunghiul $\triangle BOC$ care este isoscel cu unghiul $\widehat{BOC} = 2A$.

Exercițiul 2. Centrul cercului înscris în triunghi. Următorul program pune în evidență, printr-o animație grafică, locul geometric al punctului I , centrul cercului înscris în triunghiul $\triangle ABC$, atunci când vârful A se mișcă pe un cerc dat iar B și C sunt fixate arbitrar pe cerc.

Metoda

`void cercInscris(Complex zA, Complex zB, Complex zC, out Complex zI, out double r)` calculează afixul lui I cu formula $z_I = (az_A + bz_B + cz_C)/(a + b + c)$ unde a, b și c sunt lungimile laturilor BC, CA și, respectiv, AB . Notând cu p semiperimetrul $p = (a + b + c)/2$, raza r a cercului înscris se găsește din relația $S = pr$ unde aria S a triunghiului este calculată cu formula lui Heron $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

```
public class LocGeomI : ComplexForm
{
    void unCerc(Complex q, double r, int N, Color col)
    {
        double alfa = 2 * Math.PI / N;
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            setPixel(q + Complex.setRoTheta(r, k * alfa), col);
        }
    }

    void cercInscris(Complex zA, Complex zB, Complex zC,
                    out Complex zI, out double r)
    {
        double a = (zB - zC).Ro;
        double b = (zC - zA).Ro;
        double c = (zA - zB).Ro;
        double p = (a + b + c) / 2;
        double S = Math.Sqrt(p * (p - c) * (p - b) * (p - a));
        zI = (a * zA + b * zB + c * zC) / (a + b + c);
        r = S / p;
    }

    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-10, 10, -10, 10);
        ScreenColor = Color.White;
        double R = 7;

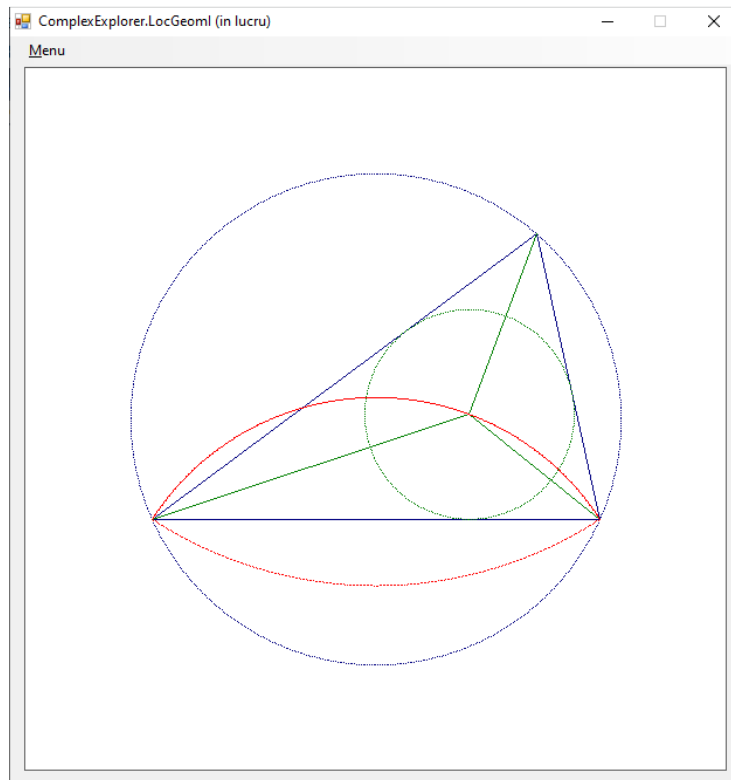
        int nrPuncte = 720;
        double delta = 2 * Math.PI / nrPuncte;
        int nB = nrPuncte / 2 + nrPuncte / 15, nC = nrPuncte - nrPuncte / 15;
        Complex zB = Complex.setRoTheta(R, nB * delta);
        Complex zC = Complex.setRoTheta(R, nC * delta);
    }
}
```

```

for (int n = 0; n < 10 * nrPuncte; n++)
{
    if (n % nrPuncte == nB || n % nrPuncte == nC) continue;
    Complex zA = Complex.setRoTheta(R, n * delta);
    initScreen();
    unCerc(0, R, nrPuncte, Color.Navy);
    setLine(zA, zB, Color.Navy);
    setLine(zB, zC, Color.Navy);
    setLine(zC, zA, Color.Navy);
    Complex zI;
    double r;
    cercInscris(zA, zB, zC, out zI, out r);
    unCerc(zI, r, 300, Color.Green);
    setLine(zA, zI, Color.Green);
    setLine(zB, zI, Color.Green);
    setLine(zC, zI, Color.Green);
    if (!resetScreen()) return;
}
}
}

```

Adăugați codul necesar pentru a pune în evidență, colorate în roșu, cele două arce de cerc care formează locul geometric al lui I (demonstrați!), și care să rămână nemișcate în timpul animației:



Exercițiul 3. Ortocentrul. Vrem să evidențiem acum locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ΔABC , atunci când vârful A se mișcă pe un cerc dat iar B și C sunt fixate arbitrar pe cerc. În programul următor trebuie implementată metoda

```
void ortocentru(Complex zA, Complex zB, Complex zC, out Complex zH){}
```

astfel încât aceasta să calculeze afixul lui H cu formula $z_H = (\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C) / (\alpha + \beta + \gamma)$

unde ponderile α , β și γ sunt date de relațiile

$$\alpha = (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\beta = (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2),$$

$$\gamma = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2).$$

```
public class LocGeomH : ComplexForm
{
    void unCerc(Complex q, double r, int N, Color col)
    {
        double alfa = 2 * Math.PI / N;
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            setPixel(q + Complex.setRoTheta(r, k * alfa), col);
        }
    }

    public void ortocentru(Complex zA, Complex zB, Complex zC, out Complex zH)
    {
        zH = 0; // de corectat!
    }

    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-10, 10, -12, 8);
        ScreenColor = Color.White;
        double R = 6;

        int nrPuncte = 720;
        double delta = 2 * Math.PI / nrPuncte;
        int nB = nrPuncte / 2 + nrPuncte / 15, nC = nrPuncte - nrPuncte / 15;
        Complex zB = Complex.setRoTheta(R, nB * delta);
        Complex zC = Complex.setRoTheta(R, nC * delta);

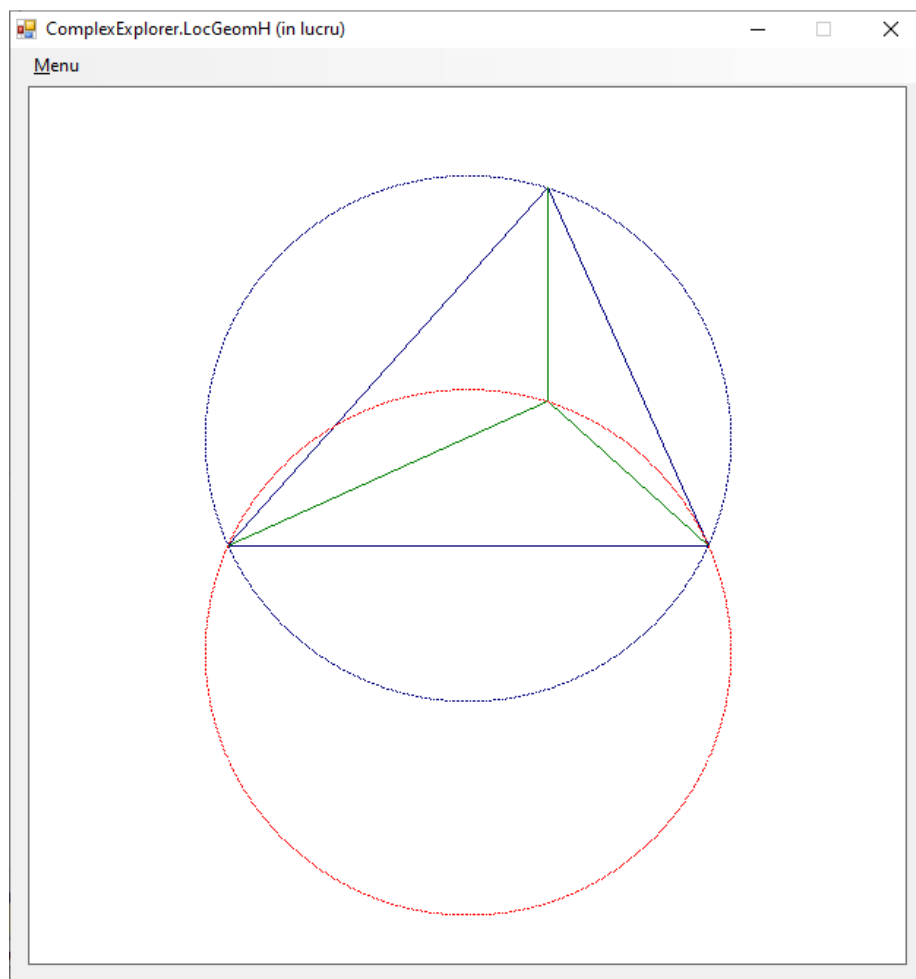
        for (int n = 0; n < 10 * nrPuncte; n++)
        {
            if (n % nrPuncte == nB || n % nrPuncte == nC) continue;
            Complex zA = Complex.setRoTheta(R, n * delta);
            initScreen();
            unCerc(0, R, nrPuncte, Color.Navy);
            setLine(zA, zB, Color.Navy);
            setLine(zB, zC, Color.Navy);
            setLine(zC, zA, Color.Navy);
            Complex zH;
            ortocentru(zA, zB, zC, out zH);
            setLine(zA, zH, Color.Green);
        }
    }
}
```

```

        setLine(zB, zH, Color.Green);
        setLine(zC, zH, Color.Green);
        if (!resetScreen()) return;
    }
}

```

Adăugați și codul necesar pentru a pune în evidență, colorat în roșu, cercul care formează locul geometric al lui H (demonstrați!), și care să rămână nemișcat pe parcursul animației:



Exercițiul 4. Punctul lui Gergonne. Fie A', B' și C' punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ΔABC , cu laturile BC, CA și, respectiv, AB . Notăm cu p semiperimetrul $p = (a + b + c)/2$.

a) arătați că $BA' = BC' = p - b, CB' = CA' = p - c, AC' = AB' = p - a$,

b) demonstrați că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente într-un punct J , numit *punctul lui Gergonne*.

c) aflați coordonatele baricentrice ale punctului J și corectați programul următor astfel încât cerculețul roșu să fie centrat mereu în intersecția celor trei ceviane verzi:

```
public class Gergonne : ComplexForm
{
    void unCerc(Complex q, double r, int N, Color col)
    {
        double alfa = 2 * Math.PI / N;
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            setPixel(q + Complex.setRoTheta(r, k * alfa), col);
        }
    }

    void pctGergonne(Complex zA, Complex zB, Complex zC, out Complex zJ)
    {
        //...calculeaza zJ, afixul punctului lui Gergonne.....
        double alfa = 1; //de corectat!
        double beta = 1; //de corectat!
        double gama = 1; //de corectat!
        zJ = (alfa * zA + beta * zB + gama * zC) / (alfa + beta + gama);
    }

    void deseneazaTriunghi(Complex zA, Complex zB, Complex zC)
    {
        double a = (zB - zC).Ro;
        double b = (zC - zA).Ro;
        double c = (zA - zB).Ro;
        double p = (a + b + c) / 2;
        double S = Math.Sqrt(p * (p - c) * (p - b) * (p - a));
        Complex zI = (a * zA + b * zB + c * zC) / (a + b + c);
        double r = S / p;

        Complex zAprim = ((p - b) * zC + (p - c) * zB) / a;
        Complex zBprim = ((p - c) * zA + (p - a) * zC) / b;
        Complex zCprim = ((p - a) * zB + (p - b) * zA) / c;

        setLine(zA, zB, Color.Navy);
        setLine(zB, zC, Color.Navy);
        setLine(zC, zA, Color.Navy);

        unCerc(zI, r, 1000, Color.Blue);

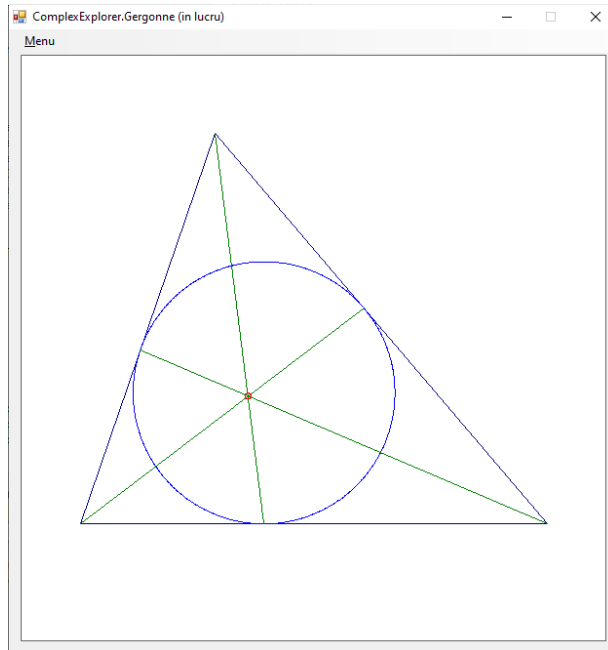
        setLine(zA, zAprim, Color.Green);
        setLine(zB, zBprim, Color.Green);
        setLine(zC, zCprim, Color.Green);
    }
}
```

```

public override void makeImage()
{
    setXminXmaxYminYmax(0, 10, 0, 10);
    ScreenColor = Color.White;

    Complex i = new Complex(0, 1);
    Complex zB = 1 + 2 * i;
    Complex zC = 9 + 2 * i;
    Complex zQ = 5 + 8 * i;
    for (double t = 0; t < 10000; t += 0.005)
    {
        initScreen();
        Complex zA = zQ + Complex.setRoTheta(2 * Math.Sin(3 * t), t);
        deseneazaTriunghi(zA, zB, zC);
        Complex zj = 0;
        pctGergonne(zA, zB, zC, out zj);
        unCerc(zj, 0.05, 100, Color.Red);
        if (!resetScreen()) return;
    }
}
}

```



- Indicație:* a) Se folosește faptul că tangentele dintr-un punct la un cerc dat sunt egale.
b) Se aplică teorema lui Ceva.
c) Cu notațiile standard, avem

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_b} = \frac{p-b}{p-c} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{\frac{1}{p-c}} = \frac{\sigma_b}{\frac{1}{p-b}}$$

de unde deducem următorul set de coordonate omogene pentru punctul lui Gergonne:

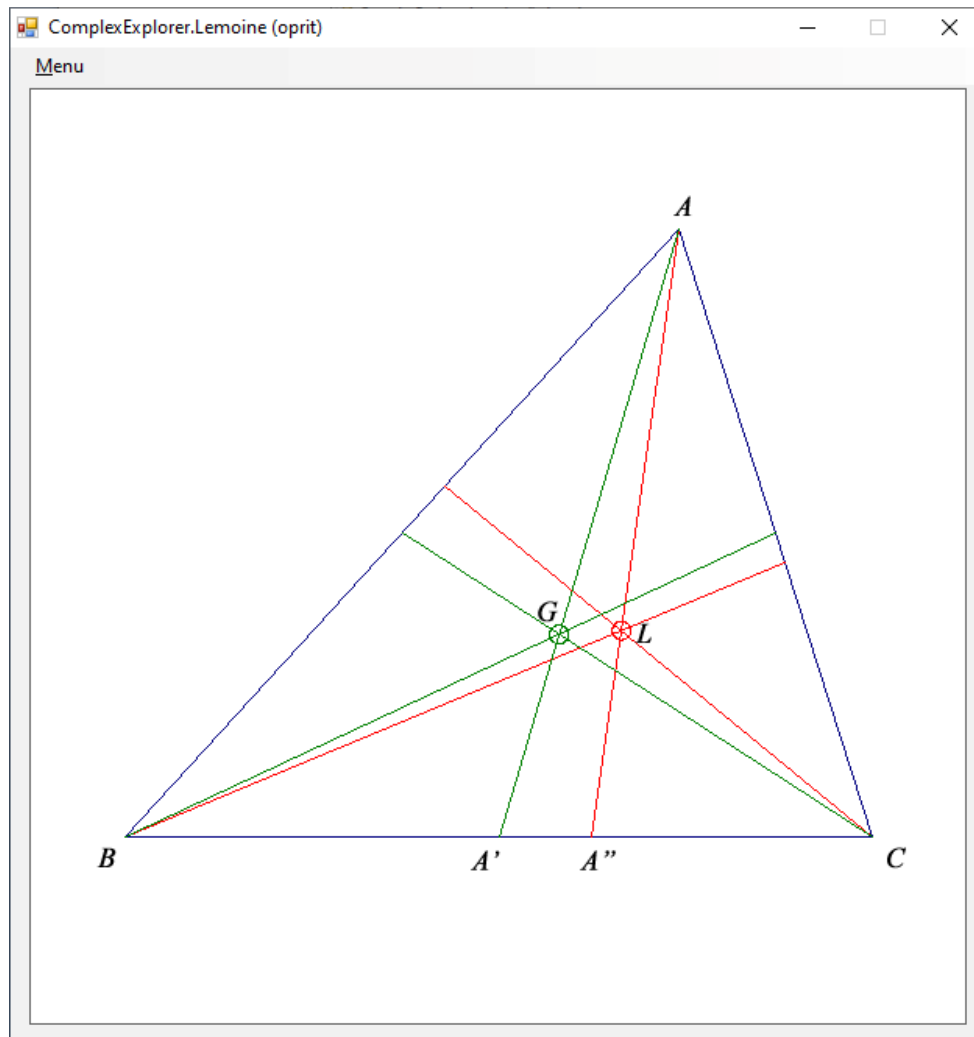
$$\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}$$

Exercițiul 5. Punctul lui Lemoine. Două ceviane AA' și AA'' duse prin vârful A al unui triunghi ΔABC se numesc *izogonale* dacă unghiul făcut de una dintre ele cu o latură este egal cu unghiul făcut de cealaltă ceviană cu cealaltă latură a unghiului A , mai precis, dacă $\widehat{BAA'} = \widehat{A''AC}$. Izogonala unei mediane se numește *simediană*.

a) arătați că simediana împarte latura opusă într-un raport egal cu pătratul raportului celorlalte două laturi ale triunghiului.

b) demonstrați că simedianele unui triunghi sunt concurente într-un punct L , numit *punctul lui Lemoine*.

c) Puneți în evidență această proprietate (printr-o animație grafică, eventual) marcând cu un cerculeț verde centrul de greutate și cu unul roșu punctul lui Lemoine al unui triunghi oarecare:



Indicație: a) Fie AA'' simediana corespunzătoare medianei AA' . Notăm $\beta = \widehat{BAA'} = \widehat{A''AC}$ și $\gamma = \widehat{CAA'} = \widehat{A''AB} = A - \beta$ și exprimăm cu arii rapoartele în care cevielele AA'' și AA' împart latura BC . Avem

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{\sigma_{\Delta BAA''}}{\sigma_{\Delta CAA''}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AA'' \cdot \sin \widehat{BAA''}}{\frac{1}{2}AC \cdot AA'' \cdot \sin \widehat{CAA''}} = \frac{c \sin \gamma}{b \sin \beta}$$

și

$$1 = \frac{BA'}{A'C} = \frac{\sigma_{\Delta BAA'}}{\sigma_{\Delta CAA'}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AA' \cdot \sin \widehat{BAA'}}{\frac{1}{2}AC \cdot AA' \cdot \sin \widehat{CAA'}} = \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma}$$

Înmulțind aceste două rapoarte, obținem relația căutăată:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{c^2}{b^2}$$

b) Se aplică teorema lui Ceva, folosind punctul a).

c) Punctul A'' se poziționează cunoscând raportul în care acesta împarte segmentul BC . Pentru aflarea afixului punctului L se folosesc coordonatele lui baricentrice, care se determină analog cu coordonatele centrului cercului înscris (vezi tutorialul *Coordonate baricentrice*).

Exercițiul 6. a) Fie Q un punct în interiorul triunghiului ΔABC și fie AA', BB', CC' cevielele prin Q , conform figurii. Determinați poziția lui Q cunoscând pozițiile vârfurilor triunghiului și rapoartele

$$v_B = \frac{AB'}{AC}, \quad v_C = \frac{AC'}{AB}.$$

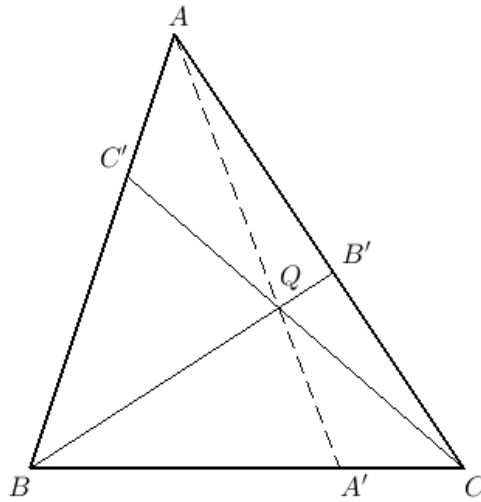
Rezolvare. Metoda I, aflarea afixului z_Q prin determinarea coordonatelor baricentrice ale lui Q este lăsată cititorului (vezi tutorialul).

Metoda a II-a. Pentru a poziționa punctul Q pe AA' vom folosi relația lui Van Aubel

$$\frac{AQ}{QA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$$

iar pentru al poziționa pe A' pe BC vom folosi teorema lui Ceva:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$



Avem următoarele calcule

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB'}{AC - AB'} = \frac{\frac{AB'}{AC}}{1 - \frac{AB'}{AC}} = \frac{v_B}{1 - v_B}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{v_C}{1 - v_C}.$$

Prin urmare

$$\lambda_Q = \frac{AQ}{QA'} = \frac{v_B}{1 - v_B} + \frac{v_C}{1 - v_C}$$

și

$$\lambda_A = \frac{BA'}{A'C} = \frac{C'B}{AC'} \cdot \frac{AB'}{B'C} = \frac{1 - v_C}{v_C} \cdot \frac{v_B}{1 - v_B}.$$

Mai departe, afixele punctelor A' și Q se determină astfel

$$\lambda_A = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_{A'}} \Rightarrow z_{A'} = \frac{z_B + \lambda_A z_C}{1 + \lambda_A}$$

și

$$\lambda_Q = \frac{z_Q - z_A}{z_{A'} - z_Q} \Rightarrow z_Q = \frac{z_A + \lambda_Q z_{A'}}{1 + \lambda_Q}$$

b) Următorul program pune în evidență locul geometric al punctului Q atunci când segmentul $B'C'$ se mișcă rămânând tot timpul paralel cu BC .

`public class VanAubel3 : ComplexForm`

```

{
void intersectie(Complex zA, Complex zB, Complex zC, double niuB, double niuC,
out Complex zAprim, out Complex zQ) //niuB=AB'/AC niuC=AC'/AB
{
double lambdaA = niuB * (1 - niuC) / (niuC * (1 - niuB));
//lambdaA =BA'/A'C
zAprim = (zB + lambdaA * zC) / (1 + lambdaA);

double lambdaQ = niuB/(1-niuB) + niuC/(1-niuC);
//lambdaQ=AQ/QA'
zQ = (zA + lambdaQ * zAprim) / (1 + lambdaQ);
}

void unCerc(Complex q, double r, int N, Color col)
{
double alfa = 2 * Math.PI / N;
for (int k = 0; k < N; k++)
{
setPixel(q + Complex.setRoTheta(r, k * alfa), col);
}
}

public override void makeImage()
{
setXminXmaxYminYmax(-2, 12, -2, 12);
ScreenColor = Color.White;
PenColor = Color.Navy;

Complex i = new Complex(0, 1);
Complex zB = 1 + 2 * i;
Complex zC = 9 + 2 * i;
Complex zA = 7 + 8 * i;

for (int n = 0; n < 10000; n++)
{
initScreen();
double t = n * 0.01;
double niuBprim = 0.01 + 0.49 * (1 + Math.Sin(t));
double niuCprim = niuBprim;

Complex zCprim = zA + niuCprim * (zB - zA);
Complex zBprim = zA + niuBprim * (zC - zA);
Complex zAprim, zQ;
intersectie(zA, zB, zC, niuBprim, niuCprim, out zAprim, out zQ);

setLine(zA, zB, PenColor);
setLine(zB, zC, PenColor);
setLine(zC, zA, PenColor);

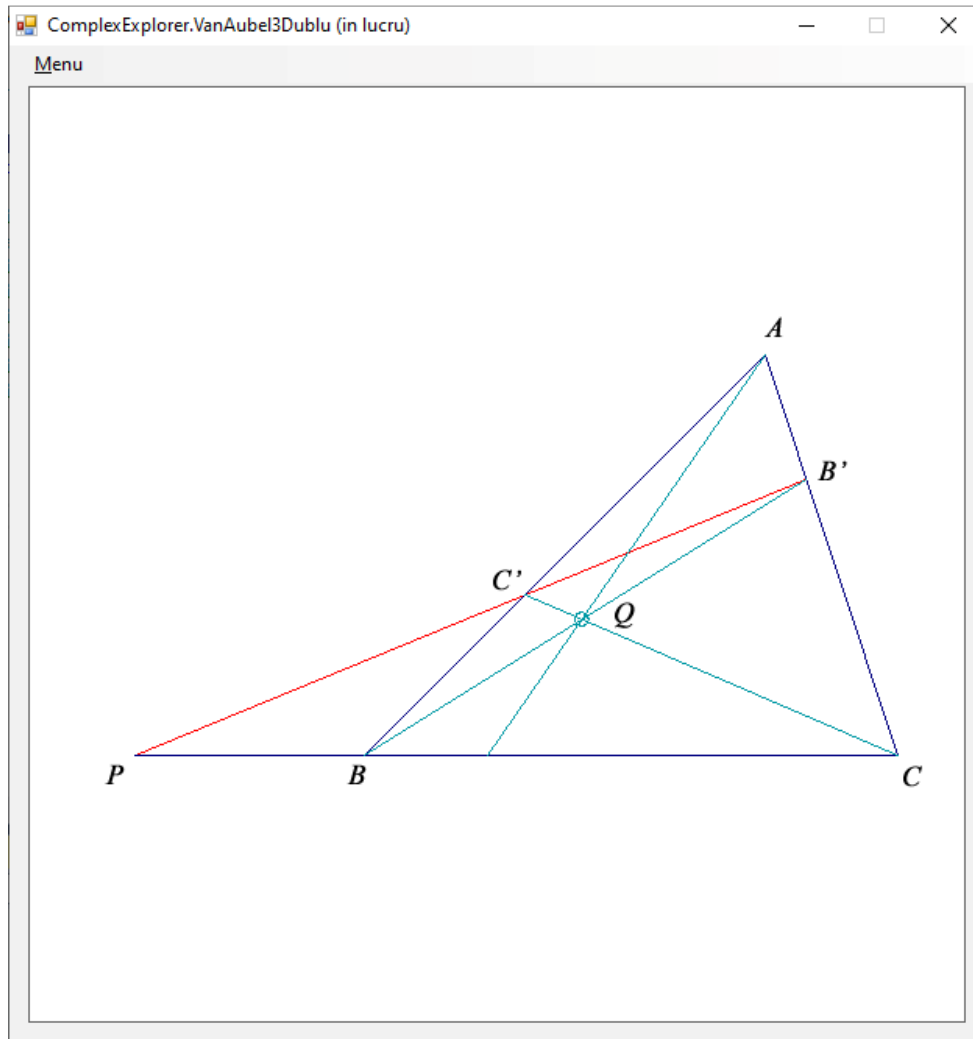
Color col = getColor(n);
setLine(zCprim, zBprim, Color.Red);
setLine(zA, zAprim, col);
setLine(zB, zBprim, col);
setLine(zC, zCprim, col);
unCerc(zQ, 0.1, 100, col);

if (!resetScreen()) return;
}
}
}

```

}

Rulați programul și apoi modificați-l pentru a arăta locul geometric al punctului Q atunci când dreapta $B'C'$ trece tot timpul printr-un punct fix P situat pe dreapta BC , în exteriorul triunghiului.



Indicație. Fixați punctul P pe BC alegând un raport $PB/BC = 2/3$, de exemplu. Lăsați punctul B' să se miște periodic pe AC ca în programul dat, determinați mai întâi poziția lui C' ca intersecție de două ceviane în triunghiul ΔCPA (sau, prin Teorema lui Menelaus, ca intersecție dintre secanta PB' cu latura AB a triunghiului ΔABC) și apoi determinați poziția lui Q ca intersecție de două ceviane în ΔABC .

Exercițiul 7. Pe laturile triunghiului ΔABC se construiesc în exterior triunghiurile $\Delta AC'B$, $\Delta BA'C$, și $\Delta CB'A$ astfel încât $\widehat{BAC'} = \widehat{CAB'} = \alpha$, $\widehat{ABC'} = \widehat{CBA'} = \beta$, $\widehat{BCA'} = \widehat{ACB'} = \gamma$. Puneți în evidență printr-o animație grafică (și, eventual demonstrați) că dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente. De exemplu: țineți fix triunghiul ΔABC și variați mărimea lui $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Indicație : Exprimăm cu arii rapoartele în care cevienele AA' , BB' , CC' împart laturile triunghiului:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{\sigma_{\Delta ABA'}}{\sigma_{\Delta ACA'}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BA' \cdot \sin \widehat{ABA'}}{\frac{1}{2}AC \cdot CA' \cdot \sin \widehat{ACA'}} = \frac{c \cdot BA' \cdot \sin(B + \beta)}{b \cdot CA' \cdot \sin(C + \gamma)} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(B + \beta)}{\sin(C + \gamma)}$$

Aici am folosit teorema sinusurilor în $\Delta BA'C$

$$\frac{BA'}{\sin \gamma} = \frac{CA'}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{BA'}{CA'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

Mai departe se aplică teorema lui Ceva.

