

Tema 9

Pseudospirale

Spiralele centrate în origine sunt curbele care admit o reprezentare parametrică $z = z(t)$ de forma

$$z(t) = \rho(t)e^{i\omega t}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \omega t \\ y(t) = \rho(t) \sin \omega t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

cu $\rho = \rho(t)$ o funcție netedă de clasă C^∞ , pozitivă și strict monotonă. Parametrul real $\omega \neq 0$ este viteza unghiulară de rotație a punctului curent în jurul originii, iar $\rho = \rho(t)$ reprezintă legea de variație a distanței de la origine la punctul curent. Monotonia strictă a funcției ρ asigură faptul că spirala este o curbă simplă, care nu se autointersectează.

Dintre exemplele deja întâlnite amintim: spirala lui Arhimede (vezi Tema 2)

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

și spirala logaritmică (vezi Tutorialul 9)

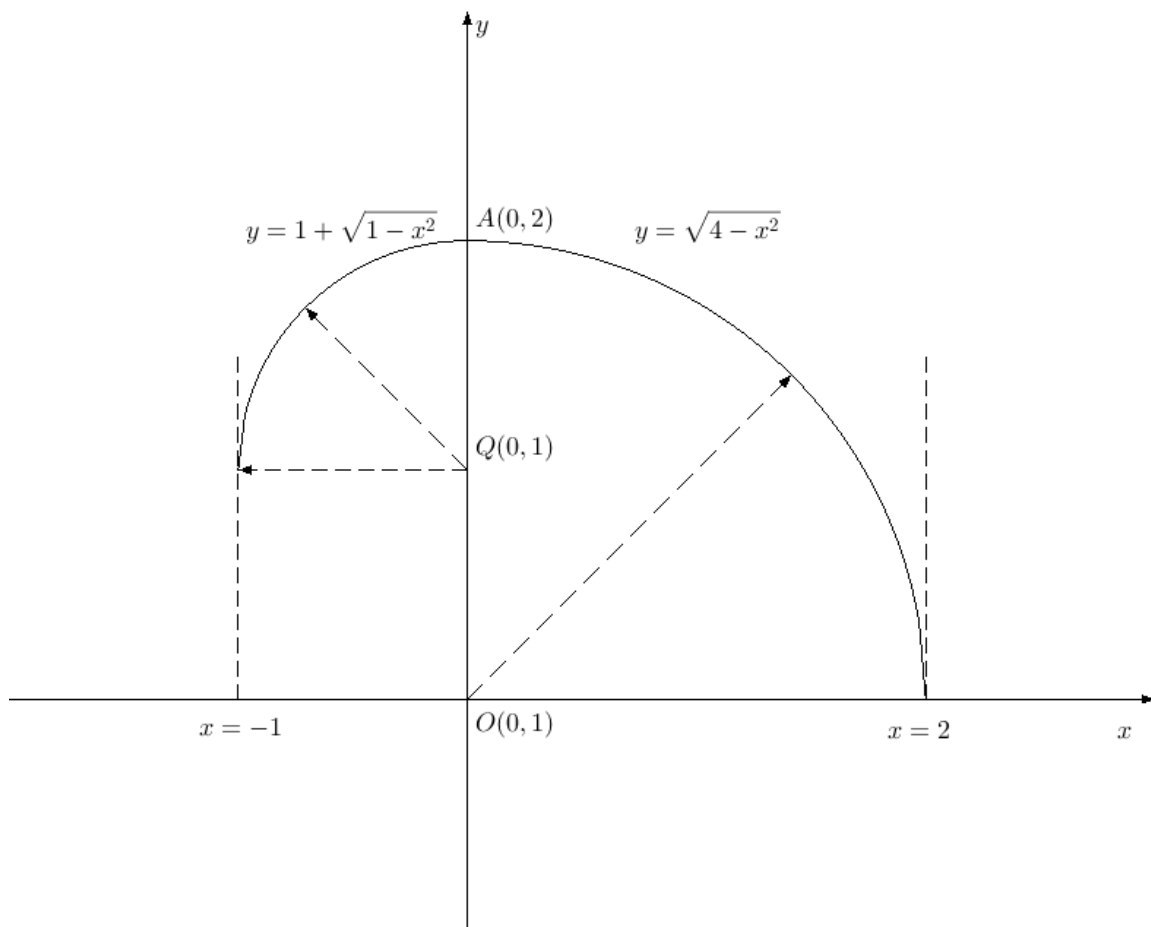
$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \cos bt \\ y(t) = e^{at} \sin bt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Prin *pseudospirală* înțelegem o curbă care aproximează o spirală dată, curbă construită de regulă prin racordarea unor arce de cerc astfel încât în punctele de racordare tangentele să fie în prelungire, ceea ce presupune ca punctul de racordare să fie pe linia centrelor. Rezultatul obținut este o curbă de clasă C^1 , nicidecum C^∞ .

Exercițiul 1. Se consideră funcția $f: (-1,2) \rightarrow (0, +\infty)$ definită de

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1 - x^2}, & x \in (-1,0) \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{4 - x^2}, & x \in (0,2) \end{cases}$$

care are graficul din figura următoare, format prin racordarea în punctul $A(0,2)$ a două sferturi de cerc cu centrele în $Q(0,1)$ și $O(0,0)$. Arătați că f este derivabilă cu derivata continuă, dar nu este și de două ori derivabilă în $x = 0$.



Exercițiul 2. Spirala lui Arhimede este caracterizată de faptul că distanța dintre două spire consecutive, măsurată pe raza vectoare, este constantă. Programul următor construiește o pseudospirală de acest gen, racordând pe rând semicercuri având diametrele pe axa verticală și schimbând pe rând centrele, când în sus și când în jos, cu distanța dintre centre egală cu unitatea de măsură. Modificați programul pentru a obține o pseudospirală din sferturi de cerc.

```

/*****/
public class PseudoSpiralaLuiArhimede : ComplexForm
{
    Complex i = new Complex(0, 1);
    static int nrPuncte = 1000;
    static double alfa = Math.PI;
    static Complex omega = Complex.setRoTheta(1, alfa / nrPuncte);
    void traseazaArc(ref Complex q, ref Complex delta)
    {
        for (int k = 0; k < nrPuncte; k++)
        {
            delta *= omega;
            setPixel(q + delta, Color.Red);
        }
        Complex versor = delta / delta.Ro;
        q -= versor;
        delta += versor;
    }
}

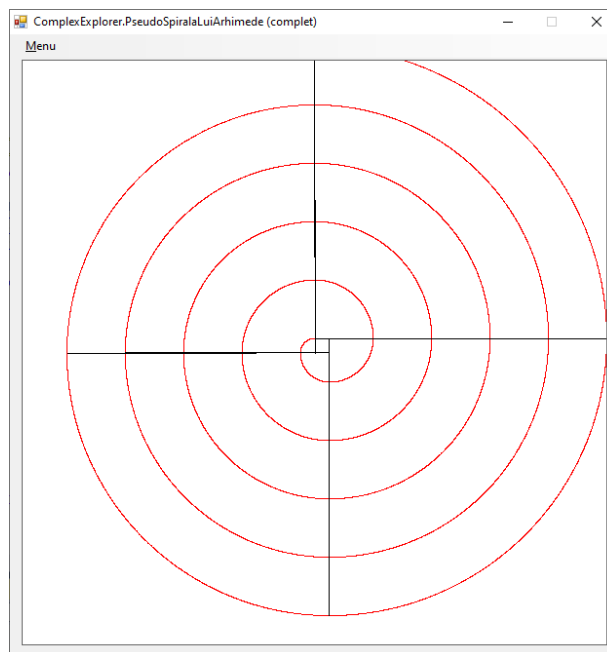
```

```

        setLine(q, q + delta, Color.Black);
    }

    public override void makeImage()
    {
        double lat = 20;
        setXminXmaxYminYmax(-lat, lat, -lat, lat);
        ScreenColor = Color.White;
        Complex q = 0;
        Complex delta = i;
        for (int k = 0; k < 20; k++)
        {
            traseazaArc(ref q, ref delta);
        }
        resetScreen();
    }
}
/*****/

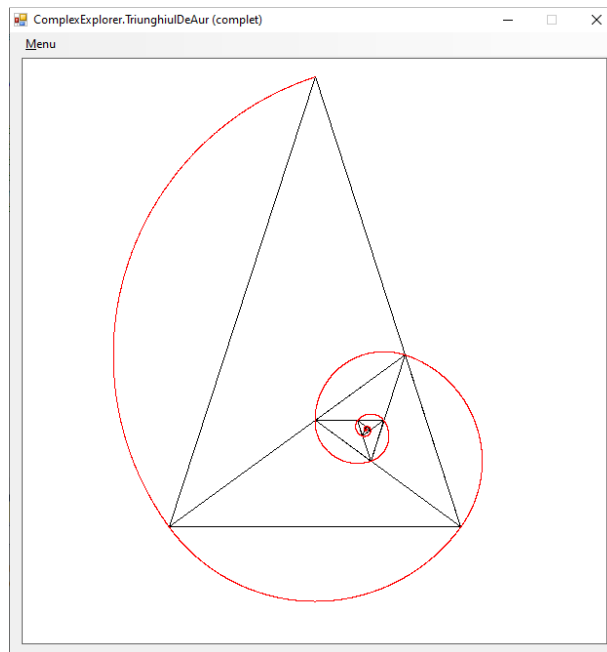
```



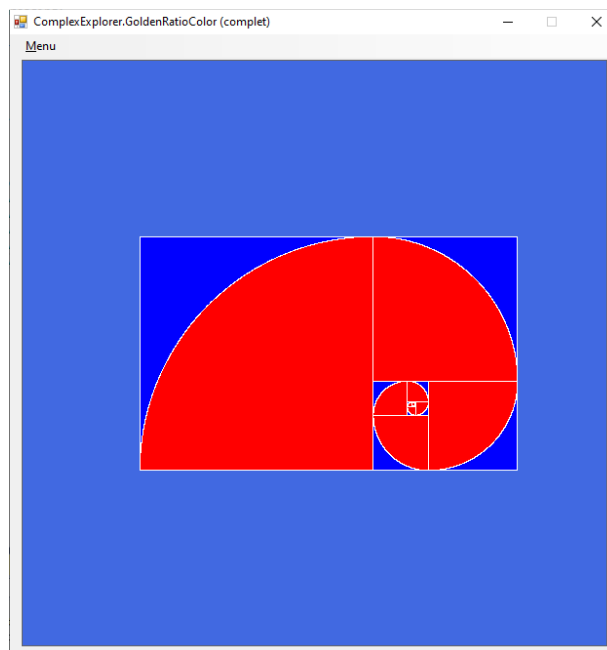
Indicație. Metoda **traseazaArc** primește prin referință centrul **q** al arcului de cerc care trebuie trasat, un semicerc aici, și tot prin referință raza vectoroare **delta** a punctului inițial al arcului. În ciclul **for** din corpul metodei vectorul **delta** este rotit puțin câte puțin pentru a pune cu **setPixel** punctele pe cerc, care au afixele de forma **q+delta**. În final, după ieșirea din **for**, centrul **q** este mutat cu o lungime egală cu unitatea de măsură pe direcția finală a vectorului **delta**, folosind versorul acestuia, și apoi este actualizată și valoarea lui **delta**, astfel încât la următorul apel noul arc să pornească din ultimul punct trasat acum.

In program trebuie modificat un singur lucru: măsura arcului trasat, din semicerc în sferț de cerc.

Exercițiul 3. Triunghiul de aur (colțul pentagramei) a fost prezentat în tutorialul atașat de unde ați aflat că el poate fi secționat într-o spirală de triunghiuri care pot fi înscrise pe spirală logaritmică adevărată. Acum vi se cere să trasați pseudospirala din figura alăturată, alcătuită din arce de 108° , și apoi să trasați spre comparație, cu altă culoare, și spirala logaritmică circumscrisă aceleiași linii poligonale.

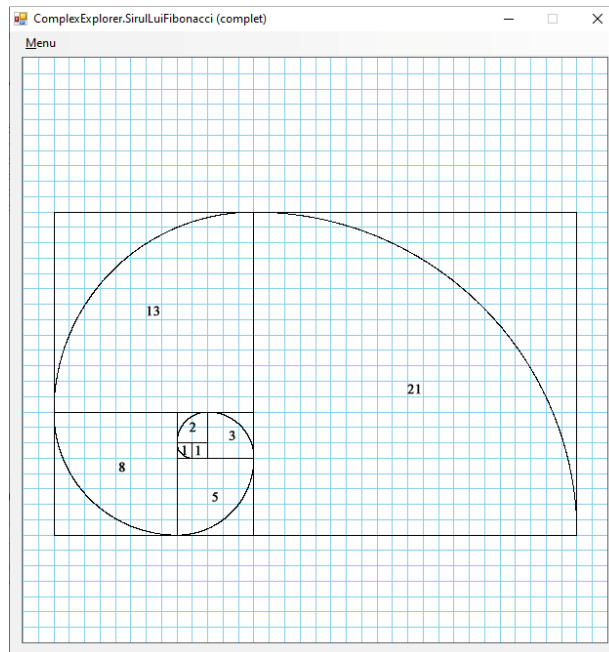


Exercițiul 4. Modificați clasa GoldenRatio prezentată la curs (vezi *planul de curs*) astfel încât să colorați un dreptunghi de aur:



Exercițiul 5. Șirul lui Fibonacci este bine-cunoscut, la fel și legătura lui cu numărul de aur¹. Construiți acum spirala de pătrate din figura de mai sus și trasați și pseudospirala aferentă.

Indicație. Începeți cu cele două pătrate de latură 1 din interior, apoi îl construiți pe cel de latură 2, și așa mai departe. Dacă notăm de fiecare dată cu $abcd$ pătratul nou construit, trebuie avut grijă ca spirala să intre mereu prin același vârf, a sa zicem, și să iasă mereu prin c .



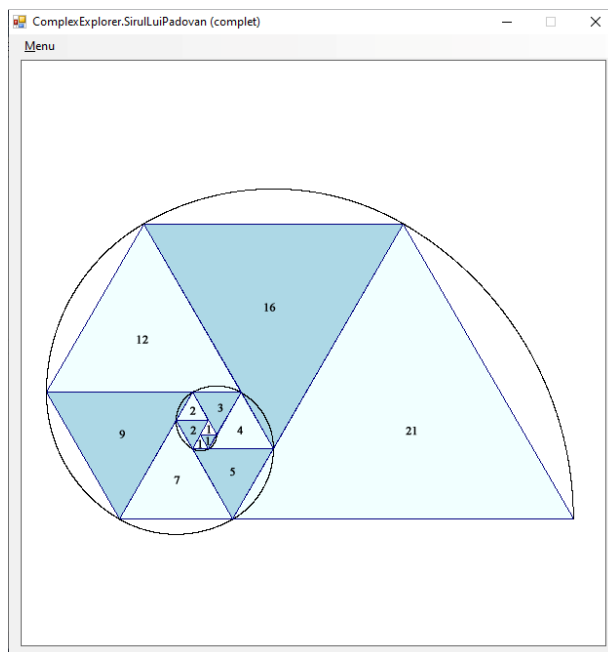
Exercițiul 6. Șirul lui Padovan este aproape necunoscut². Este definit tot de o recurență liniară cu coeficienți constanți, ca și în cazul lui Fibonacci, dar acum recurența este de ordin 3:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_{n-1} + p_{n-2}, & n = 2, 3, \dots \\ p_0 = 1, & p_1 = 1, & p_2 = 1. \end{cases}$$

Forma specifică a recurenței permite construcția următoarei spirale de triunghiuri echilaterale, cu laturile date de termenii șirului:

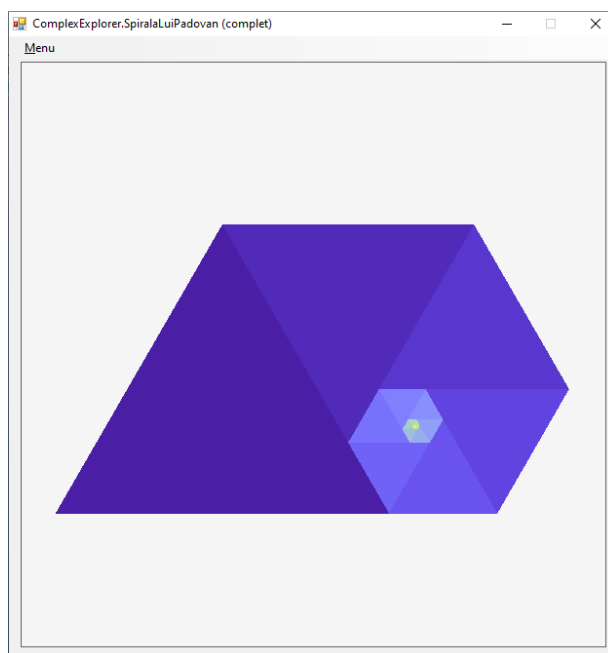
¹ vezi, de exemplu, https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

² vezi https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence



Încercați și voi. Construcție începe din interior, pseudospirala trasată fiind foarte utilă la trecerea de la un triunghi la următorul.

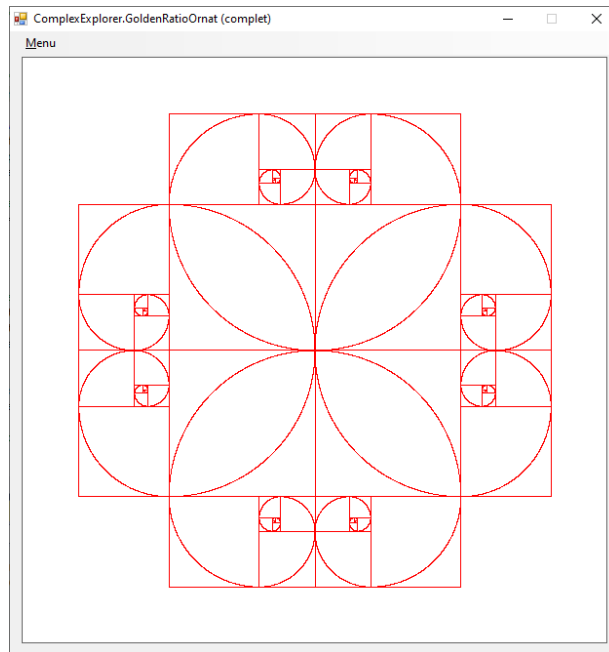
Exercițiul 7. Următoarea spirală este formată de triunghiuri echilaterale și poate fi înscrisă într-o spirală logaritmică, care ar trebui trasată. La fel de bine se poate trasa și o pseudospirală.



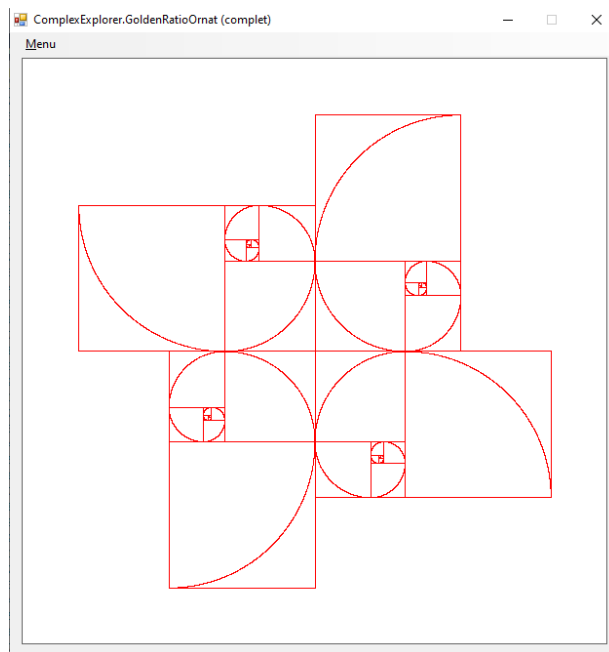
Atenție: construcția începe cu triunghiul cel mai mare, dar mai înainte trebuie aflat raportul ψ dintre laturile triunghiurilor succesive, care este constant, spre deosebire de cazul exercițiului precedent.

Exercițiul 8. În final, vă puteți distra cu următoarele variațiuni pe temă dată:

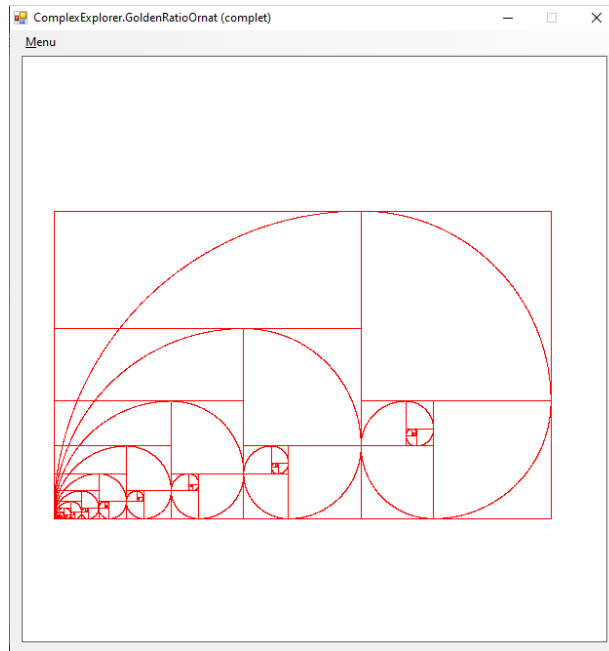
a)



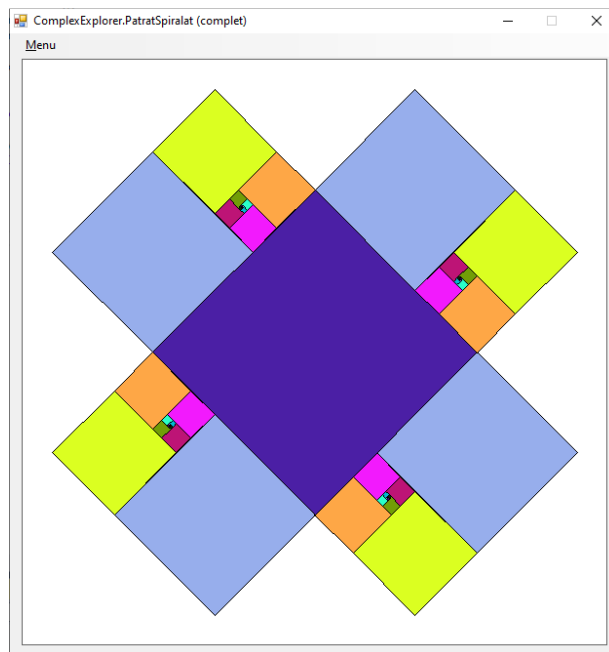
b)



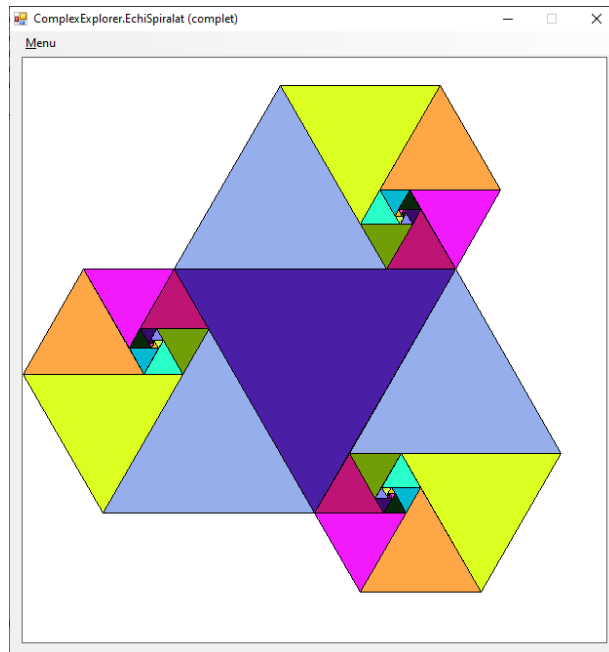
c)



d)



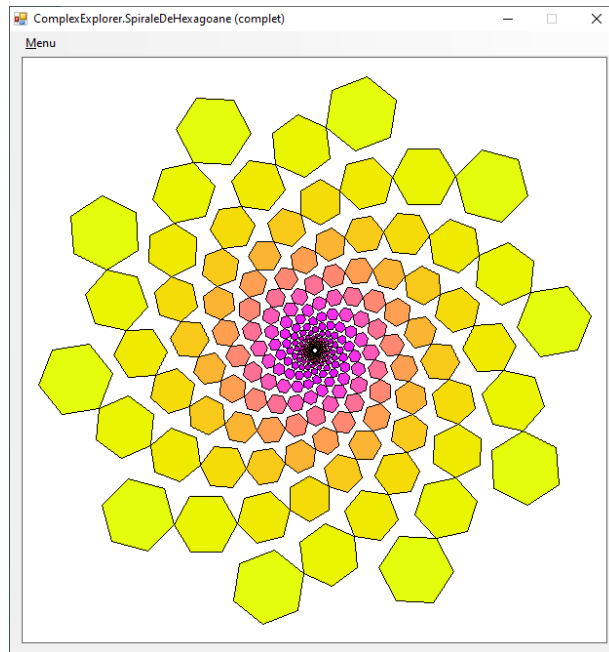
e)



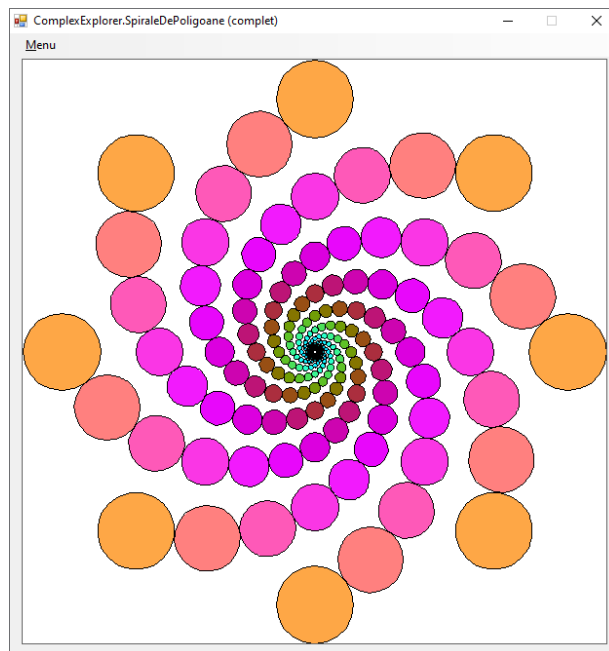
f)



g)



h)



Mult succes!