

Spirala logaritmică

Vom prezenta în acest tutorial spirala logaritmică, o curbă cu proprietăți remarcabile, care apare în mod natural în analiza complexă, fiind soluția ecuației diferențiale liniare

$$z'(t) = \lambda z(t).$$

Aici vrem să evidențiem proprietățile geometrice ale acestei curbe¹, insistând asupra faptului că puterile q^n , cu $n \in \mathbb{Z}$, ale oricărui număr complex $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $|q| \neq 1$, sunt situate pe o spirală logaritmică. Dacă $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ are modulul 1, puterile lui sunt pe cercul unitate, după cum bine știm, iar dacă q este număr real, puterile lui sunt pe axa reală, desigur.

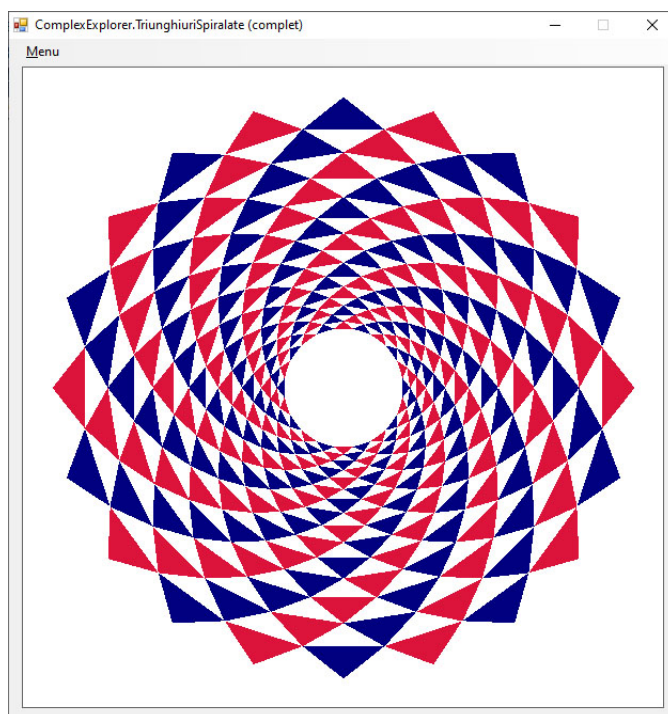


Figura 1: Progresii geometrice

De exemplu, triunghiurile din Figura 1 au vârfurile în punctele

$$z_{n,m} = \omega^n q^m, \quad n = 0, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M,$$

cu $N = 20$ și $M = 15$, iar

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}, \quad q = 0.8 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N} \right).$$

¹vezi <https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/logarithmic/logarithmic.shtml>

Definiție. Numim spirală logaritmică o curbă care admite o reprezentare parametrică de forma

$$(\Gamma) \quad z(t) = q + u_0 e^{\lambda t}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

unde $\lambda = a + ib$ este un parametru complex cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$, iar q și u_0 sunt două numere complexe cu $u_0 \neq 0$.

Observație. Cazul $a = 0$ corespunde cercului iar $b = 0$ dreptei. Dacă $u_0 = 0$ traiectoria lui $z = z(t)$ se reduce la un punct.

Notăm cu $r = r(t)$ distanța de la punctul q la punctul curent $z(t)$ și cu $\theta = \theta(t)$ unghiul făcut de semidreapta de la q la $z(t)$ cu orizontala. Ținând cont de expresia funcției exponențiale

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

obținem

$$r(t) = |z(t) - q| = |u_0| e^{\lambda t} = r_0 e^{at}, \quad (2)$$

$$\theta(t) = \arg(z(t) - q) = \arg(u_0) + \arg e^{\lambda t} = \theta_0 + bt, \quad (3)$$

unde am notat $r_0 = |u_0|$ și $\theta_0 = \arg u_0$. Din ultima relație rezultă că punctul curent $z = z(t)$ se rotește în jurul punctului fix q cu viteză unghiulară constantă

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = (\theta_0 + bt)' = b \neq 0,$$

în timp ce se apropie de acesta, dacă $a < 0$, sau se îndepărtează, dacă $a > 0$, după legea exponențială dată de (2). Parametrizarea (1) descrie astfel o mișcare în spirală în jurul centrului q .

Observăm că prin schimbarea de variabilă $u = z - q$, care reprezintă o translație, obținem pentru $u = u(t)$ legea de mișcare

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t},$$

iar aceasta este o mișcare pe o spirală logaritmică centrată în origine.

Deoarece orice spirală logaritmică poate fi translatată astfel cu centrul în origine, vom prezenta în continuare proprietățile geometrice ale curbei (Γ) considerând numai cazul $q = 0$.

Proprietatea definitorie a spiralei logaritmice este următoarea:

Propoziția 1. O curbă este o spirală logaritmică dacă și numai dacă unghiul dintre raza vectoare a punctului curent și tangenta la curbă este constant, diferit de zero (caz în care curba este o dreaptă) și de unghiul drept (caz în care curba este un cerc).

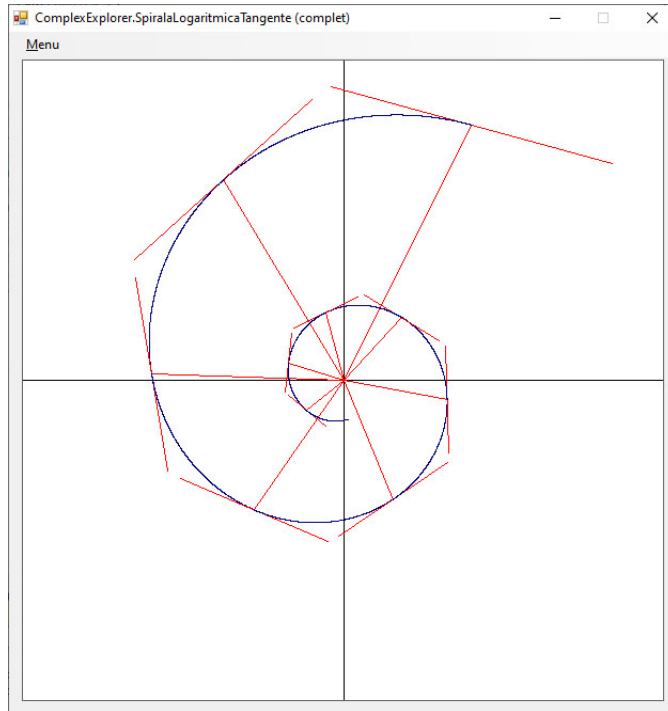


Figura 2: class SpiralaLogaritmicăTangente

Demonstrație. Fie (Γ) spirala logaritmică dată de ecuația

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t}.$$

Unghiul $\varphi = \varphi(t)$ dintre raza vectorie și tangentă este unghiul dintre direcțiile lui $z(t)$ și $z'(t)$, unghi care apare în definiția produsului scalar

$$\langle z(t), z'(t) \rangle = |z(t)| |z'(t)| \cos \varphi(t).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \cos \varphi(t) &= \frac{\langle z(t), z'(t) \rangle}{|z(t)| |z'(t)|} = \frac{\langle z(t), \lambda z(t) \rangle}{|z(t)| |\lambda z(t)|} = \\ &= \frac{1}{|\lambda| |z(t)|^2} \cdot \frac{1}{2} \left(z(t) \overline{\lambda z(t)} + \overline{z(t)} \lambda z(t) \right) = \\ &= \frac{1}{|\lambda| |z(t)|^2} \cdot \frac{1}{2} (\overline{\lambda} |z(t)|^2 + \lambda |z(t)|^2) = \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{2} (\overline{\lambda} + \lambda) = \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|} = \text{const.} \end{aligned}$$

Aici am folosit expresia produsului scalar în complex:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (u\bar{v} + \bar{u}v).$$

Implicația inversă, dacă (Γ) are proprietatea descrisă atunci este o spirală logaritmică, se justifică pe baza rezultatelor de unicitate locală din teoria ecuațiilor diferențiale, și este lăsată cititorului.

Următorul program ilustrează această proprietate, vezi Figura 2:

```

/*****/
public class SpiralaLogaritmicaTangente : ComplexForm
{
    Complex i = new Complex(0, 1);
    Complex Exp(Complex z)
    {
        return Complex.setRoTheta(Math.Exp(z.Re), z.Im);
    }
    public override void makeImage()
    {
        double r = 2.5;
        setXminXmaxYminYmax(-r, r, -r, r);
        ScreenColor = Color.White;
        double a = -0.2, b = 1.0;
        Complex lambda = a + b * i;
        double x0 = 1, y0 = 2;
        Complex z0 = x0 + y0 * i;
        setAxis();
        double T = 10; //t in [0,T]
        int N = 10000; //nr. puncte
        double deltat = T / N;
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            double t = k * deltat;
            Complex z = z0 * Exp(lambda * t); //z=z(t)
            setPixel(z, Color.Navy);
            if (k % 1000 == 0)
            {
                Complex zprim = lambda * z; //z'=z'(t)
                double dt = 0.5;
                setLine(z - zprim * dt, z + zprim * dt, Color.Red);
                setLine(0, z, Color.Red);
            }
            if (!resetScreen()) return;
        }
    }
}
/*****/

```

O altă proprietate remarcabilă a spiralei logaritmice este următoarea:

Propoziția 2. *Rotirea unei spirale logaritmice în jurul centrului său are același efect ca o scalare în raport cu centrul.*

Demonstrație. Fie $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$ ecuația spiralei date. Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$ avem relația

$$z(t + \theta) = z_0 e^{\lambda(t+\theta)} = z_0 e^{\lambda t} e^{\lambda \theta} = z(t) e^{a\theta} (\cos b\theta + i \sin b\theta),$$

pe care o scriem sub forma

$$(\cos b\theta + i \sin b\theta) z(t) = e^{-a\theta} z(t + \theta).$$

Egalitatea de mai sus arată că punctul curent $z(t)$ rotit în jurul originii cu unghiul $b\theta$ ajunge în același loc ca punctul $z(t + \theta)$ de pe spirala dată scalat cu factorul real $e^{-a\theta}$.

Această proprietate care i-a fascinat pe cei care au descoperit-o, vezi de exemplu https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral, este pusă în evidență printr-o animație grafică de clasa următoare.

Animația are două părți: în prima parte este afișată cu roșu spirala memorată în tabloul `Complex[] sp`, scalată în mod repetat cu factorul `alfa = 1.01`, iar în a doua parte este afișată în albastru aceeași spirală rotită în mod repetat cu unghi de $\pi/100$ radiani. Observați că efectul vizual este același.

```

/*****/

public class SpiraMirabilis : ComplexForm
{
    Complex Exp(Complex z)
    {
        return Complex.setRoTheta(Math.Exp(z.Re), z.Im);
    }

    Complex[] spirala(Complex lambda, double T, int N)
    {
        Complex[] rez = new Complex[N];
        double deltat = T / N;
        for (int k = 0; k < N; k++)
        {
            double t = k * deltat;
            rez[k] = Exp(t * lambda);
        }
        return rez;
    }

    void transforma(Complex[] sp, Complex omega)
    {

```

```

        for (int k = 0; k < sp.Length; k++)
        {
            sp[k] *= omega;
        }
    }
    void traseaza(Complex[] sp, Color col)
    {
        for (int k = 1; k < sp.Length; k++)
        {
            setLine(sp[k - 1], sp[k], col);
        }
    }
    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-0.5, 0.5, -0.5, 0.5);
        ScreenColor = Color.White;
        Complex lambda = Complex.setReIm(-0.1, 0.8);
        double T = 100;
        int N = 1000;
        Complex[] sp = spirala(lambda, T, N);
        //scalare iterata cu factor alfa
        double alfa = 1.01;
        for (int t = 0; t < 500; t++)
        {
            initScreen();
            transforma(sp, alfa);
            traseaza(sp, Color.Red);
            setAxis();
            if (!resetScreen()) return;
        }
        //rotatie iterata cu unghi alfa
        sp = spirala(lambda, T, N);
        alfa = Math.PI / 100;
        Complex omega = Complex.setRoTheta(1, alfa);
        for (int t = 0; t < 1000; t++)
        {
            initScreen();
            transforma(sp, omega);
            traseaza(sp, Color.DarkBlue);
            setAxis();
            if (!resetScreen()) return;
        }
    }
}
/*****

```

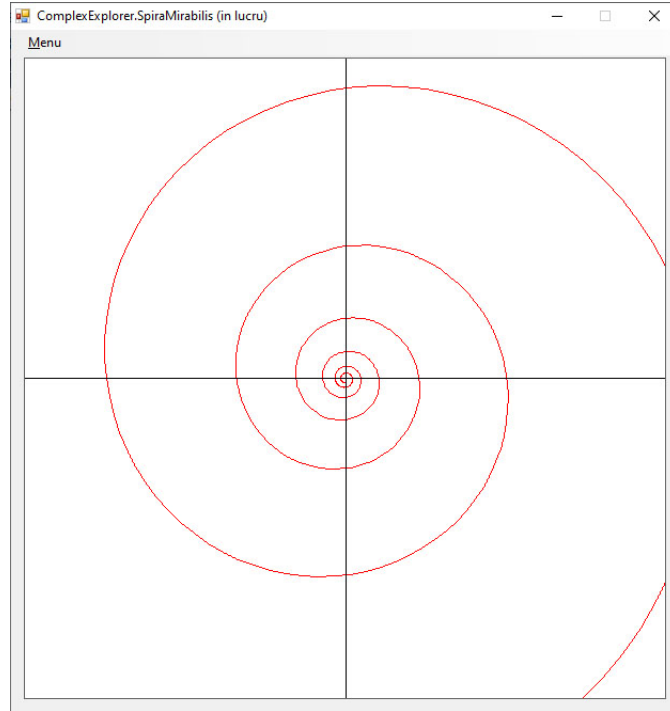


Figura 3: class SpiraMirabilis

Propoziția 3. *Spirală logaritmică transformă orice progresie aritmetică a argumentului într-o progresie geometrică pe curbă.*

Demonstrație. Fie $t_n = t_0 + n\theta$ o progresie aritmetică de rație $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$. Notăm $z_n = z(t_n)$ și avem

$$z_{n+1} = z(t_{n+1}) = z(t_n + \theta) = z_0 e^{\lambda(t_n + \theta)} = z_0 e^{\lambda t_n} e^{\lambda \theta} = z_n e^{\lambda \theta}$$

prin urmare

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = e^{\lambda \theta} = \omega = \text{const.}$$

ceea ce trebuia arătat.

Ultima relație spune că toate triunghiurile $0z_n z_{n+1}$ sunt toate asemenea între ele.

Triunghiul $0z_n z_{n+1}$ degenerază când raportul ω este un număr real. Cel mai mic $\theta > 0$ pentru care

$$\text{Im } \omega = \text{Im } e^{\lambda \theta} = e^{a\theta} \sin b\theta = 0$$

este $\theta = \frac{\pi}{b}$, caz în care z_n sunt toate punctele de intersecție cu spirala ale unei drepte care trece prin origine. Pentru

$$\theta = \frac{2\pi}{b}$$

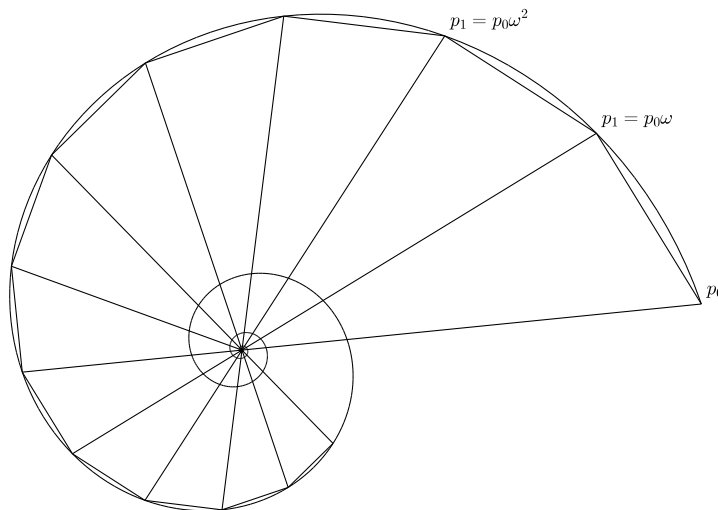


Figura 4: Progresia geometrică

obținem punctele de intersecție cu spirala ale unei raze vectoriale. Din cele arătate mai sus rezultă că distanțele până la origine ale acestor puncte formează o progresie geometrică reală, cu rația

$$|\omega| = |e^{2\pi\lambda}| = e^{2\pi a}.$$

Are loc și proprietatea reciprocă:

Propoziția 4. *Punctele oricărei progresii geometrice având rația*

$$\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

cu $\rho \neq 1$ și $\theta \neq k\pi$, se află pe o spirală logaritmică cu centrul în origine.

Observație. Cazurile exceptate corespund cercului, respectiv dreptei.

Demonstrație. Considerăm progresia geometrică $p_n = p_0\omega^n$ cu rația $\omega \in \mathbb{C}$ satisfăcând cerințele. Avem

$$\begin{aligned} \omega^n &= \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (e^{\ln \rho})^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \\ &= e^{n \ln \rho}(\cos n\theta + i \sin n\theta) = e^{n \ln \rho + in\theta} = e^{\lambda n} \end{aligned}$$

unde

$$\lambda = \ln \rho + i\theta. \tag{4}$$

Prin urmare punctele p_n se află pe spirala logaritmică

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t},$$

cu $z_0 = p_0$ și λ dat de (4), deoarece

$$p_n = p_0 \omega^n = p_0 e^{\lambda n} = z(n).$$

Foarte interesant este faptul că și seria geometrică se înscrie pe o spirală logaritmică:

Propoziția 4. *Sumele parțiale ale oricărei progresii geometrice având rația*

$$\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

cu $\rho \neq 1$ și $\theta \neq k\pi$, se află pe o spirală logaritmică.

Demonstrație. Considerăm progresia geometrică $p_n = p_0 \omega^n$. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= p_0 + p_1 + \cdots + p_n = p_0(1 + \omega + \cdots + \omega^n) = \\ &= p_0 \frac{1 - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{p_0}{1 - \omega} - \frac{p_0 \omega}{1 - \omega} \omega^n = \frac{p_0}{1 - \omega} - \frac{p_0 \omega}{1 - \omega} e^{\lambda n}, \end{aligned}$$

cu λ dat de (4). Notăm $q = \frac{p_0}{1 - \omega}$ și $z_0 = p_0$, și obținem

$$s_n = q + (z_0 - q)e^{\lambda n},$$

deci, conform formulei (1), punctele s_n se află pe spirala logaritmică de centrul q și parametri z_0 și λ , vezi Figura 5.

Observație. În figurile ilustrative pentru ultimile două propoziții a fost aleasă rația ω subunitară în modul pentru o mai bună încadrare a imaginilor, deoarece în acest caz spiralele se înfășoară în jurul centrului, dar rezultatele sunt adevărate și pentru $|\omega| > 1$, când spiralele se desfășoară.

Propoziția 5. *Fie (a_n) un șir de puncte în planul complex astfel încât linia poligonală a_0, a_1, a_2, \dots are următoarele două proprietăți:*

- (i) *toate unghiurile dintre două laturi consecutive au aceeași măsură, diferită de $k\pi$, k întreg;*
- (ii) *toate rapoartele $\frac{\ell(a_n a_{n+1})}{\ell(a_{n-1} a_n)}$ dintre lungimile laturilor consecutive au aceeași valoare, $\rho \neq 1$.*

În aceste condiții linia poligonală are vârfurile pe o spirală logaritmică și, în plus, dacă raportul ρ este subunitar atunci șirul a_n este convergent la punctul q , centrul spiralei.

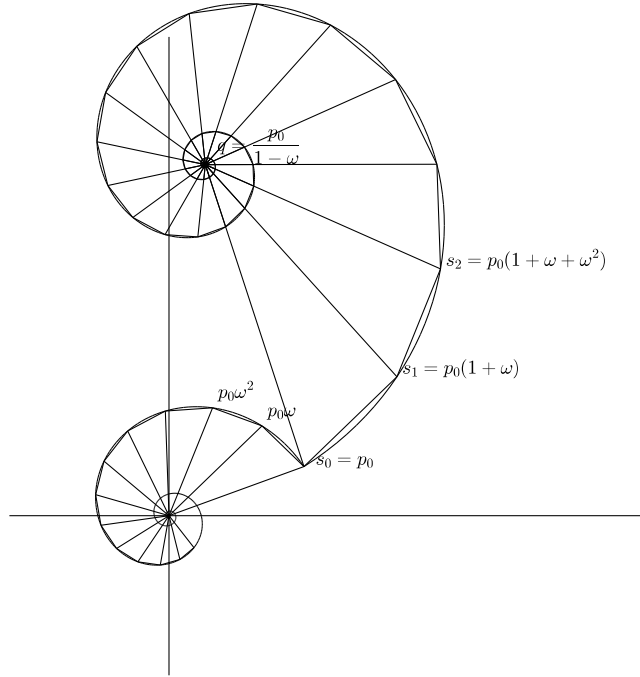


Figura 5: Seria geometrică

Demonstrație. Arătăm că următorul raport este constant și îl notăm cu ω :

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \omega = \text{const.}$$

Într-adevăr, avem

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{|a_n - a_{n-1}|} = \frac{\ell(a_n a_{n+1})}{\ell(a_{n-1} a_n)} = \rho$$

și

$$\arg \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \arg(a_{n+1} - a_n) - \arg(a_n - a_{n-1}) = \text{const.}$$

fiind unghiul dintre două laturi consecutive.

Prin urmare, avem relațiile

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \omega(a_1 - a_0), \\ a_3 - a_2 &= \omega(a_2 - a_1) = \omega^2(a_1 - a_0), \\ &\dots \\ a_{n+1} - a_n &= \omega(a_n - a_{n-1}) = \omega^n(a_1 - a_0), \end{aligned}$$

care sumate conduc la

$$a_{n+1} - a_1 = (\omega + \omega^2 + \dots + \omega^n)(a_1 - a_0) = \omega \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} (a_1 - a_0).$$

De aici, după un calcul simplu, urmează că

$$a_{n+1} - \frac{a_1 - \omega a_0}{1 - \omega} = \frac{a_0 - a_1}{1 - \omega} \omega^{n+1}$$

de unde, notând

$$q = \frac{a_1 - \omega a_0}{1 - \omega},$$

deducem că șirul $b_n = a_n - q$ este o progresie geometrică cu rația ω . Din Propoziția 4 urmează că punctele b_n se află pe o spirală logaritmică cu centrul în origine, prin urmare translatata acestora cu vectorul q va fi spirala căutată.

Următoarea clasă trasează, plecând de la trei puncte a_0 , a_1 și a_2 fixate arbitrar, linia poligonală cu proprietățile (i) și (ii) unic determinată de cele trei puncte inițiale, precum și spirala logaritmică pe care se află vârfurile ei.

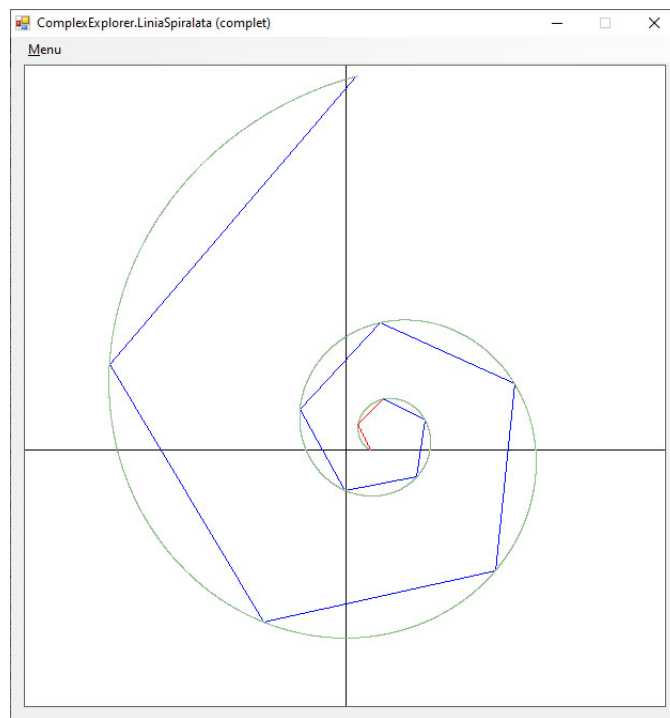


Figura 6: Seria geometrică

```

public class LiniaSpiralata : ComplexForm
{
    static Complex i = new Complex(0, 1);
    Complex Exp(Complex z)
    {
        return Complex.setRoTheta(Math.Exp(z.Re), z.Im);
    }
    void traseazaSpirala(Complex a0, Complex a1, Complex a2)
    {
        //trasam linia poligonala
        Complex omega = (a2 - a1) / (a1 - a0);
        int N = 12;
        setLine(a0, a1, Color.Blue);
        Complex aTrec = a1, aPrez = a2;
        for (int k = 0; k < N - 1; k++)
        {
            setLine(aTrec, aPrez, Color.Blue);
            Complex aViit = aPrez + omega * (aPrez - aTrec);
            aTrec = aPrez;
            aPrez = aViit;
        }
        //trasam spirala logaritmica
        Complex lambda = new Complex(Math.Log(omega.Re), omega.Theta);
        Complex z0 = (a0 - a1) / (1 - omega);
        Complex q = (a1 - a0 * omega) / (1 - omega);
        for (double t = 0; t < N; t += 0.001)
        {
            Complex zt = q + z0 * Exp(t * lambda);
            setPixel(zt, Color.DarkSeaGreen);
        }
    }
    public override void makeImage()
    {
        setXminXmaxYminYmax(-25, 25, -20, 30);
        ScreenColor = Color.White;
        setAxis();
        Complex a0 = 2;
        Complex a1 = 1 + 2 * i;
        Complex a2 = 3 + 4 * i;
        traseazaSpirala(a0, a1, a2);
        setLine(a0, a1, Color.Red);
        setLine(a1, a2, Color.Red);
        resetScreen();
    }
}

```

În continuare prezentăm două aplicații celebre ale Propoziției 5.

Spirala de aur. Dintre toate dreptunghiurile, cele mai armonioase se consideră a fi cele pentru care raportul dintre lungimea L și lățimea l , notat cu

$$\varphi = \frac{L}{l},$$

este astfel ales încât dacă decupăm din dreptunghiul dat un pătrat cu latura l , vezi Figura 7, dreptunghiul care rămâne are laturile tot în același raport, mai precis dacă are loc egalitatea

$$\frac{l}{L-l} = \varphi.$$

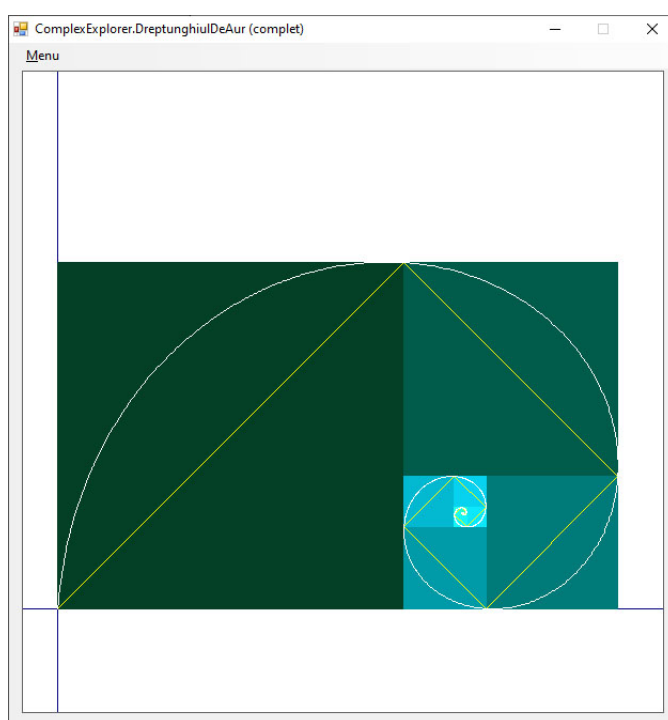


Figura 7: Spirala de aur

Din aceste relații rezultă imediat că raportul φ , numit *raportul de aur*, este soluția pozitivă a ecuației

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

adică

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$$

Numărul φ și dreptunghiurile de aur au multe proprietăți², noi suntem interesați aici doar de *spirala de aur*: dreptunghiul rămas după decuparea pătratului

²vezi https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

este tot un dreptunghi de aur, deci după ce decupăm și din acesta un pătrat rămânem tot cu un dreptunghi de aur, și așa mai departe. Dacă alegem modul de decupare ca în Figura 7 obținem o spirală de pătrate.

Problemă. Să se arate că centrele pătratelor din Figura 7 formează un șir convergent la un punct q , aflat în interiorul tuturor dreptunghiurilor de aur obținute prin decupările succesive.

Rezolvare. Acum prima parte a enunțului este foarte ușor de demonstrat: este suficient să observăm că linia poligonală formată de diagonalele galbene ale pătratelor are proprietățile cerute de Propoziția 5, cu raportul dintre laturile consecutive subunitar

$$\rho = \frac{1}{\varphi} = 0.618 \dots < 1.$$

Din propoziția menționată rezultă că vârfurile acestor diagonale sunt situate pe o spirală logaritmică, numită *spirală de aur*, și deoarece raportul ρ este subunitar, șirul vârfurilor este convergent la centrul q al spiralei. Evident că în acest caz și mijloacele diagonalelor formează un șir convergent la q .

Partea a doua a problemei este lăsată spre rezolvare cititorului.

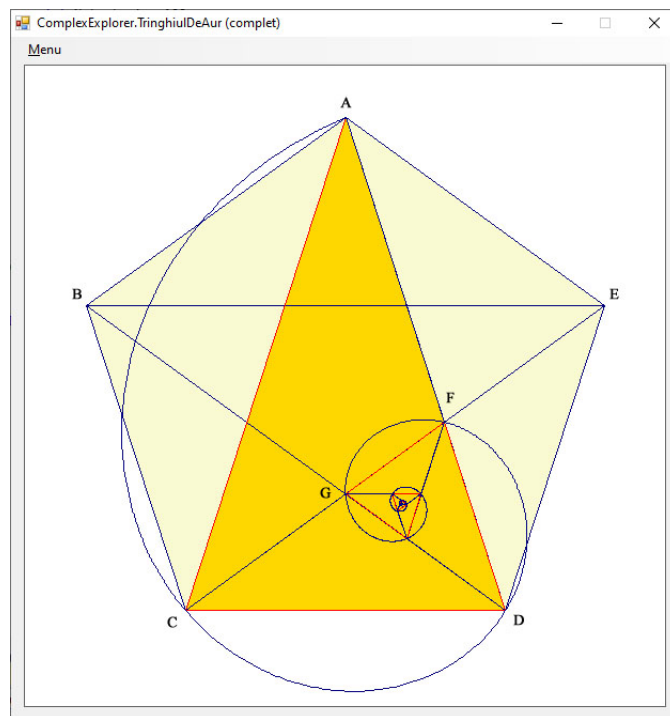


Figura 8: Triunghiul de aur

Triunghiul de aur. Raportul de aur apare în mod natural în pentagonul regulat, emblema școlii lui Pitagora, fiind raportul dintre lungimea diagonalei și

lungimea laturii. Semnalăm, cu notațiile din Figura 8, și alte apariții ale lui φ :

$$\varphi = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DF} = \frac{DF}{FG}.$$

Triunghiul isoscel $\triangle ACD$, cu unghiul de la vârf (apexul) $\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$ rad = 36° și unghiurile de la bază $\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{2\pi}{5}$ rad = 72° , are proprietatea că bisectoarea CF a unghiului de la bază \widehat{C} , de exemplu, îl împarte în două triunghiuri, dintre care unul, $\triangle CDF$, este asemenea cu cel dat, având aceleași măsuri pentru unghiuri, după cum este ușor de constatat.

Un astfel de triunghi, cu unghiurile de 36° , 72° și 72° , este numit *triunghi de aur*.

Prin urmare: secționăm triunghiul de aur $\triangle ACD$ și obținem alt triunghi de aur, $\triangle CDF$, îl secționăm și pe acesta și obținem încă unul, și continuăm tot așa. Dacă alegem modul de secționare ca în Figura 8, obținem o spirală de triunghiuri.

Problemă. *Arătați că toate triunghiurile de aur obținute prin procedeul de mai sus au vârfurile pe o spirală logaritmică și trasați această spirală.*

Rezolvare. Aplicăm Propoziția 5 pentru linia poligonală $ACDFG\dots$ și actualizăm clasa `LiniaSpiralata`.