Cursul 1

Introducere

Suport de curs: `www.math.uaic.ro/~necula`

Bibliografie

V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iasi, 1985.

C. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. Univ. Al. I. Cuza din Iasi, 1971.

G. Moroşanu, *Ecuatii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1989.

I. I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1999.

Algoritmul de notare

La sfârşitul semestrului fiecare cursant primeşte o notă care evaluează activitatea depusă la seminar şi cunoştinţele dobândite.

În sesiune, examenul constă dintr-o proba orală, teorie şi probleme.

Nota finală este media dintre nota la examen şi nota din timpul semestrului.

La restanţe şi la măriri de notă nu se mai ţine cont de nota din timpul semestrului.

Cerinţe minimale

Pentru promovarea examenului sunt necesare cunoştinţele de analiză matematică din programa preuniversitară (limite, continuitate, derivabilitate, reprezentarea grafică a funcţiilor reale de un singur argument, calculul primitivelor funcţiilor elementare), precum şi cunoaşterea metodelor de integrare a ecuaţiilor diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi.

Pentru nota minimă de promovare aceste cunoştinţe sunt şi suficiente.

§1. Generalităţi despre ecuaţii diferenţiale

Exemplul iniţial: Să se integreze ecuaţia

$$x' = \frac{2x}{t},\ t > 0, \tag{1}$$

şi să se determine soluţia care la momentul $t_0 = 5$ are valoarea $x_0 = 10$.

Rezolvare. Deoarece variabila x apare sub simbolul de derivare, deducem că x este funcţia necunoscută, presupusă de clasă C^1, iar t este argumentul său.

Avem de rezolvat o *ecuaţie diferenţială*, adică o *ecuaţie funcţională* în care *funcţia necunoscută* apare în ecuaţie împreună cu derivatele sale. A *integra* o ecuaţie diferenţială înseamnă a o rezolva, a afla soluţiile ei. Convenţia uzuală de scriere a unei ecuaţii diferenţiale prevede ca argumentul funcţiei necunoscute şi al derivatelor sale să nu fie scris în mod explicit dacă el reiese clar din context. Mai mult, se notează de obicei cu aceeaşi literă atât funcţia cât şi variabila care desemnează valoarea funcţiei, altfel spus se foloseşte notaţia $x = x(t)$ în loc de $x = f(t)$.

Dacă funcţia necunoscută are un singur argument avem o *ecuaţie diferenţială ordinară*, altfel avem o *ecuaţie cu derivate parţiale*. Ordinul ecuaţiei este ordinul maxim al derivatelor funcţiei necunoscute care apar în ecuaţie.

Funcţiile necunoscute sunt presupuse, în mod implicit, că sunt definite pe mulţimi conexe. În cazul unei ecuaţii ordinare aceasta însemnă că prin soluţie vom înţelege, întodeauna, o funcţie definită pe un singur interval, derivabilă de atâtea ori cât este ordinul ecuaţiei.

Forma generală sub care poate fi enunţată o ecuaţie diferenţială de ordin n este

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0,$$

cu F o funcţie continuă pe un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Din motive practice, se preferă explicitarea formei generale în raport cu ultima variabilă, adică aducerea ei la *forma normală*:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$

După cum vom vedea, o ecuaţie diferenţială admite, de regulă, o infinitate de soluţii. Pentru a reduce numărul acestora se formulează diverse condiţii suplimentare, dintre care cea mai folosită constă în prescrierea valorilor funcţiei necunoscute şi a primelor $n-1$ derivate la un *moment iniţial* $t = t_0$. Obţinem o *problemă cu valori iniţiale* sau pe scurt, o *problemă Cauchy*:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n. \end{cases}$$

Revenind la exemplul dat, observăm că avem de rezolvat o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul înâi. Vom afla mai întâi *soluţia generală* a ecuaţiei, care în cazul nostru va fi o familie de curbe care depinde de o constantă $c \in \mathbb{R}$ arbitrară, şi apoi vom determina constanta c astfel încât soluţia ecuaţiei să satisfacă condiţia iniţială.

Ecuaţia o abordăm aplicând în mod explicit strategia generală de rezolvare în două etape a unei probleme de matematică: aflăm mai întâi forma soluţiei şi apoi verificăm forma găsită.

Etapa I, forma soluţiei. Fie $x = x(t)$ o soluţie, deci o funcţie de clasă C^1, definită pe un interval $I \subset (0, +\infty)$, care satisface egalitatea

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t},$$

pentru orice $t \in I$. Presupunem că $x(t) \neq 0$ în I, împărţim la $x(t)$ şi integrăm de la un $t_0 \in I$ la t. Obţinem

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)d\tau}{x(\tau)} = 2\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau},\ \forall t \in I,$$

Prima integrală o calculăm cu schimbarea de variabilă $x = x(\tau)$, rezultă $dx = x'(\tau)d\tau$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)d\tau}{x(\tau)} = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| = \ln\frac{x(t)}{x(t_0)}.$$

În ultima egalitate am renunţat la modul deoarece $x(t)$ şi $x(t_0)$ au acelaşi semn.

A doua integrală este

$$2\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = 2(\ln t - \ln t_0) = \ln \frac{t^2}{t_0^2},$$

prin urmare, notând $c = \frac{x(t_0)}{t_0^2}$, obţinem că funcţia $x = x(t)$ are forma

$$x(t) = ct^2,$$

cu c o constantă arbitrară, şi putem alege ca domeniu de definiţie al soluţiei cel mai mare interval pe care s-a formulat problema, $I = (0, +\infty)$.

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie $x(t) = ct^2$, $t \in (0, +\infty)$. Evaluăm pe rând cei doi membrii ai ecuaţiei şi avem: în stânga

$$x'(t) = (ct^2)' = 2ct,$$

iar în dreapta

$$\frac{x(t)}{t} = \frac{ct^2}{t} = 2ct,$$

deci funcţia $x = x(t)$ verifică ecuaţia dată.

Am arătat astfel că soluţia generală a ecuaţiei (1) este dată de relaţia

$$x = ct^2, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R},$$

care reprezintă o familie de parabole cu axa de simetrie verticală şi cu vârful în origine, restricţionată la semiplanul drept, $t > 0$.

Rezolvăm acum problema Cauchy determinând constantă c astfel încât să avem $x(5) = 10$, obţinem $c = \frac{2}{5}$.

În concluzie, problema enuţată are ca unică soluţie funcţia $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$x(t) = \frac{2}{5}t^2, \ \forall t \in (0, +\infty).$$

Observaţie. Exemplul dat fiind extrem de simplu, în prima etapă am fi putut afla direct soluţia problemei Cauchy, alegând chiar $t_0 = 5$ ca limită inferioară a integralei, şi am fi obţinut imediat valoarea lui $c = \frac{x(t_0)}{t_0^2} = \frac{10}{5^2} = \frac{5}{2}$.

§2. Exemple de probleme care conduc la ecuaţii diferenţiale

Problema 1. *Să se determine o curbă plană netedă ale cărei tangente intersectează axele de coordonate în punctele $A(\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$ cu $\alpha + \beta = 1$.*

Rezolvare. Este clar că orice dreaptă care intersectează axele este o soluţie a problemei noastre, aşa că în continuare vom căuta o curbă care nu are porţiuni rectilinii. Vom presupune că aceasta este graficul Γ al unei funcţii derivabile $x = x(t)$, cu t dintr-un interval I. Pentru simplificarea expunerii vom considera numai cazul ilustrat în Figura 1, când $\alpha > 0$, $\beta > 0$ şi $I \subset (0, +\infty)$.

Fie $M(\tau, x(\tau))$, cu $\tau \in I$, un punct oarecare pe graficul Γ. Tangenta în M la grafic are ecuaţia

$$x - x(\tau) = x'(\tau)(t - \tau).$$

Intersectăm această dreaptă cu axele şi avem:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; x = x(\tau) - \tau x'(\tau) = \beta$$

şi

$$x = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{x(\tau) - \tau x'(\tau)}{x'(\tau)} = \alpha.$$

Deoarece

$$\frac{\beta}{\alpha} = -x'(\tau),\; \forall \tau \in I,$$

deducem că $x'(\tau) < 0$, pentru orice $\tau \in I$.

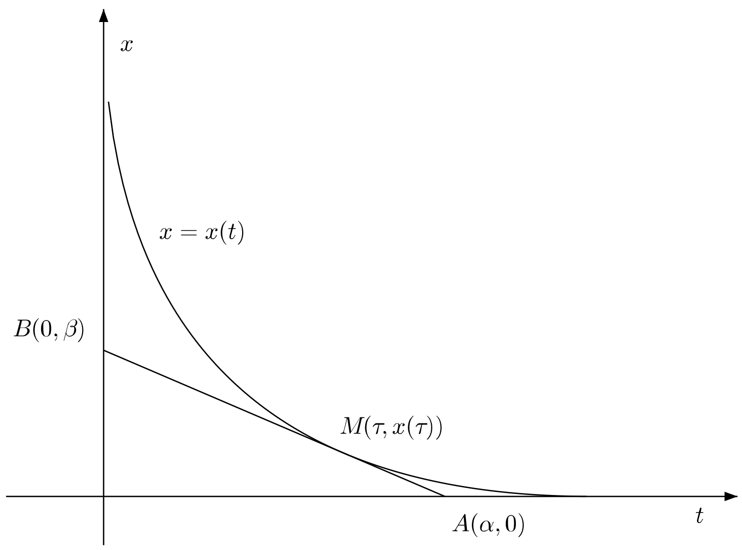

Figura 1: Parabola $\sqrt{t} + \sqrt{x} = 1$

În sfârşit, condiţia $\alpha + \beta = 1$ conduce la ecuaţia diferenţială

$$(x(\tau) - \tau x'(\tau))\left(1 - \frac{1}{x'(\tau)}\right) = 1,\; \forall \tau \in I,$$

ecuaţie pe care o scriem, renotând $t = \tau$, sub forma

$$(x - tx')\left(1 - \frac{1}{x'}\right) = 1.$$

Aici am folosit convenţia de scriere uzuală a ecuaţiilor diferenţiale: *argumentul funcţiei necunoscute şi al derivatelor sale trebuie scris explicit numai dacă el nu reiese clar din context.*

Punem ecuaţia sub forma

$$x - tx' = \frac{x'}{x'-1} \tag{2}$$

şi o derivăm. Obţinem

$$x' - x' - tx'' = \frac{x''(x'-1) - x'x''}{(x'-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$x''\left(t - \frac{1}{(x'-1)^2}\right) = 0.$$

Cum $x'' = 0$ pe un interval înseamnă că funcţia $x = x(t)$ are graficul pe acel interval un segment de dreaptă, nu suntem interesaţi de acest caz. Prin urmare, avem

$$t = \frac{1}{(x'-1)^2},$$

iar din ecuaţia (2) obţinem

$$x = \frac{1}{(x'-1)^2}x' + \frac{x'}{x'-1} = \frac{x'^2}{(x'-1)^2}.$$

Deoarece $x' < 0$ avem

$$\sqrt{t} = -\frac{1}{x'-1} \quad \text{şi} \quad \sqrt{x} = \frac{x'}{x'-1},$$

de unde, prin adunare, obţinem ecuaţia implicită a curbei căutate

$$\sqrt{t} + \sqrt{x} = 1,$$

care poate fi explicitată sub forma

$$x(t) = t - 2\sqrt{t} + 1, \; t \in (0,1).$$

Temă. Arătaţi că Γ este un arc de parabolă care are ca axă de simetrie prima bisectoare şi este tangentă la axele de coordonate. Rezolvaţi şi celelalte cazuri, de exemplu: $\alpha > 0$ şi $\beta < 0$.

Problema 2. *Să se studieze mişcarea unui punct material M de masă m, suspendat cu ajutorul unui resort elastic de un reazem fix O, în cazul în care poziţia iniţială M_0 este situată perfect sub reazem, iar viteza iniţială $\vec{v}_0$ este pe direcţia verticalei. Se va neglija rezistenţa mediului şi masa resortului.*

Rezolvare. Pentru simplificarea expunerii, admitem că, datorită condiţiilor iniţiale, mişcarea punctului M va fi pe verticala prin O şi notăm cu $\vec{e}$ versorul acesteia.

Vectorul de poziţie al lui M la momentul t este

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = r(t)\vec{e},$$

vectorul viteză

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{r}(t)\vec{e},$$

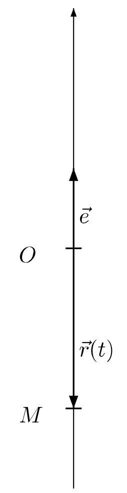

Figura 2: Oscilatorul armonic

iar vectorul acceleraţie

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \ddot{r}(t)\vec{e}.$$

Aici am folosit convenţia uzuală în mecanică de a nota cu $\dot{r}$ derivata funcţiei r în raport cu timpul.

Asupra punctului M acţionează două forţe, forţa de greutate $\overrightarrow{G} = -mg\vec{e}$ şi forţa elastică $\overrightarrow{E}$, presupusă proporţională cu elongaţia $r = OM$ (*legea lui Hooke*), deci $\overrightarrow{E} = -kr\vec{e}$, cu $k > 0$.

Aplicăm legea fundamentală a dinamicii punctului material, *legea lui Newton*,

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F},$$

cu

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{E} = (-mg - kr)\vec{e},$$

şi obţinem ecuaţia

$$m\ddot{r} = -mg - kr,$$

pe care o scriem sub forma

$$\ddot{r} + \omega^2 r = -g,$$

unde $\omega^2 = k/m > 0$. Observăm că această ecuaţie admite *soluţia staţionară* $r_0(t) = -g/\omega^2 = \text{const.}$, soluţie care corespunde punctului de echilibru. Notăm cu $x = r - r_0$ elongaţia punctului M faţă de poziţia de echilibru şi obţinem, în final, *ecuaţia oscilatorului liniar neamortizat*:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Se observă, prin calcul direct, că funcţiile

$$x(t) = \cos \omega t$$

şi

$$x(t) = \sin \omega t$$

verifică această ecuaţie şi, o dată cu ele, orice combinaţie liniară a lor

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

cu c_1, c_2 constante reale. Notând cu

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

amplitudinea oscilaţiei şi cu

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{c_1}{c_2}$$

defazajul ei, obţinem că M descrie o *oscilaţie armonică* de ecuaţie

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \; t \in \mathbb{R}.$$

Vom arăta, într-un curs viitor, că acestea sunt toate soluţiile ecuaţiei oscilatorului liniar armonic neamortizat.