Cursul 2

Ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi

§1. Ecuaţii cu variabile separabile. O *ecuaţie cu variabile separabile* este o ecuaţie de forma
$$x' = f(t)g(x), \tag{EVS}$$
unde f şi g sunt două funcţii continue.

Teoremă. *Dacă $f : I = (t_1, t_2) \to \mathbb{R}$ şi $g : J = (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$, atunci, pentru orice moment iniţial $t_0 \in I$ şi orice valoare iniţială $x_0 \in J$, problema Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{PC}$$

are local o soluţie unică, dată de formula

$$x = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right), \tag{1}$$

unde $G : J \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)}, \tag{2}$$

pentru orice $x \in J$.

Observaţie. În continuare vom avea nevoie de *Teorema de inversare locală* în cazul uni-dimensional, cu următorul enunţ: *dacă $\varphi : (t_1, t_2) \to (x_1, x_2)$ este o funcţie de clasă C^1 cu $\varphi'(t_0) \neq 0$ într-un $t_0 \in (t_1, t_2)$, atunci pe o vecinătate a lui t_0 funcţia φ este inversabilă, cu inversa φ^{-1} de clasă C^1 şi, mai mult,*

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dt}(t)}$$

în punctele care se corespund (adică $x = \varphi(t)$ sau, echivalent, $t = \varphi^{-1}(x)$).

Justificarea acestui rezultat este foarte simplă: φ' este o funcţie continuă cu $\varphi'(t_0) \neq 0$, rezultă că are semn constant pe o vecinătate $V = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset (t_1, t_2)$ a lui t_0 şi, prin urmare, φ este strict monotonă pe V. Notăm $W = \varphi(V)$ şi, din proprietatea lui Darboux a funcţiei φ, rezultă că restricţia $\varphi : V \to W$ este surjectivă. Am arătat astfel că această restricţie este inversabilă. Derivabilitatea ei într-un punct oarecare $x^* = \varphi(t^*) \in W$ se obţine cu schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$ în limita raportului incrementar:

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dx}(x^*) = \lim_{x \to x^*} \frac{\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x^*)}{x - x^*} = \lim_{t \to t^*} \frac{t - t^*}{\varphi(t) - \varphi(t^*)} = \frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dt}(t^*)}.$$

Funcţia φ^{-1} fiind derivabilă este şi continuă pe W, iar din relaţia de mai sus urmează că şi derivata sa este continuă, deci $\varphi^{-1} \in C^1(W)$.

Demonstraţia teoremei. Cum g nu se anulează şi este continuă, ea păstrează semn constant pe (x_1, x_2), la fel şi funcţia $1/g$. Urmează că G este o funcţie de clasă C^1 strict monotonă, deci inversabilă, iar din teorema de inversare locală rezultă că şi funcţia G^{-1} este de clasă C^1.

Fie $t_0 \in I$ şi $x_0 \in J$ fixaţi arbitrar. Ne propunem să rezolvăm problema (PC).

Etapa I, forma soluţiei. Fie $x = x(t)$ o soluţie a problemei (PC), definită pe un interval $I_0 \subset I$ cu $t_0 \in I_0$. Scriem ecuaţia (EVS) sub forma

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t),$$

pentru orice $t \in I_0$, şi o integrăm membru cu membru de la t_0 la t. Obţinem

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\, ds}{g(x(s))} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

pentru orice $t \in I_0$ şi, mai departe, cu schimbarea de variabile

$$u = x(s), \quad du = x'(s)ds,$$

avem

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

de unde, ţinând cont că $x_0 = x(t_0)$, urmează că

$$G(x(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds,$$

pentru orice $t \in I_0$, cu G funcţia definită de relaţia (2). Aplicând ambilor membrii funcţia G^{-1}, obţinem că soluţia $x = x(t)$ are forma precizată de relaţia (1), pentru orice $t \in \tilde{I}_0$, unde $\tilde{I}_0 \subset I_0$ este un subinterval care îl conţine pe t_0.

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie $x = x(t)$ funcţia dată de relaţia (1), definită pe un interval $I_0 \subset I$, cu $t_0 \in I_0$. Din continuitatea lui f rezultă imediat că x este de clasă C^1, iar derivata sa satisface relaţia

$$x'(t) = \left[G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right)\right]' = \frac{1}{G'\left(G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right)\right)} f(t) = g(x(t))f(t)$$

pentru orice $t \in I_0$.

Să observăm în final că, deoarece $G(x_0) = 0$, avem $G^{-1}(0) = x_0$, şi prin urmare, din (1), rezultă $x(t_0) = x_0$. Am arătat astfel că formula (1) ne furnizează o soluţie a problemei Cauchy (PC), definită local, pe un interval care îl conţine pe t_0.

Exemplu: Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2t(x^2 + 1) \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea 1. Aplicăm teorema. Avem o ecuaţie cu variabile separabile cu $f(t) = 2t$, $f : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$, $g : J = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_0 = 1$ şi $x_0 = 0$.

Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)+1} = 2t$$

şi o integrăm de la 1 la t, obţinem

$$\int_1^t \frac{x'(s)\,ds}{x^2(s)+1} = \int_1^t 2s\,ds,$$

şi cu schimbarea de variabilă $u = x(s)$ avem

$$\int_0^x \frac{du}{u^2+1} = \int_1^t 2s\,ds,$$

de unde rezultă egalitatea

$$\operatorname{arctg} x = t^2 - 1.$$

Deoarece funcţia $G(x) = \operatorname{arctg} x$ este inversabilă ca funcţie de la $J = \mathbb{R}$ în $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, este necesar ca

$$-\frac{\pi}{2} < t^2 - 1 < \frac{\pi}{2},$$

adică

$$t \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}\right).$$

Obţinem soluţia

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t^2 - 1\right),$$

definită pe intervalul $I_0 = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}\right) \subset I = \mathbb{R}$.

Rezolvarea 2. Calcul formal. Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{dx}{dt} = 2t(x^2+1),$$

separăm variabilele

$$\frac{dx}{x^2+1} = 2tdt,$$

integrăm

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int 2tdt,$$

şi avem

$$\operatorname{arctg} x = t^2 + C,$$

de unde găsim soluţia ecuaţiei diferenţiale sub *forma generală*:

$$x = \operatorname{tg}(t^2 + C).$$

Pentru a afla soluţia problemei Cauchy, determinăm constanta C impunând să fie satisfăcută condiţia iniţială, $x(1) = 0$. Se obţine soluţia

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t^2 - 1\right),$$

iar intervalul maximal care să îl conţină pe $t_0 = 1$ şi pe care funcţia să fie bine definită este $I = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+1}\right)$.

§2. Ecuaţia diferenţială a funcţiei inverse. Să considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t}{5x^4+1} \\ x(\sqrt{2}) = 1. \end{cases}$$

Ecuaţia fiind cu variabile separabile o integrăm prin metoda descrisă mai sus şi obţinem următoarea soluţie generală

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{5x^4+1} \to (5x^4+1)dx = 2tdt \to \int (5x^4+1)dx = \int 2tdt \to x^5+x = t^2+C$$

Din condiţia iniţială $x(\sqrt{2}) = 1$ rezultă $C = 0$, şi astfel am obţinut soluţia problemei Cauchy sub formă implicită

$$x^5 + x = t^2.$$

Este uşor de văzut că pentru fiecare t fixat ecuaţia numerică de mai sus are o soluţie x unică (funcţia $\varphi(x) = x^5 + x$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fiind strict crescătoare şi surjectivă) dar, conform Teoremei Abel-Ruffini, fiind o ecuaţie polinomială de grad 5, nu avem pentru ea o metodă generală de rezolvare cu radicali.

Nu reuşim să explicităm soluţia sub forma $x = x(t)$ dar reuşim sub forma $t = t(x)$. Într-adevăr, pentru t în vecinătatea lui $t_0 = \sqrt{2}$ (conform condiţiei iniţiale) avem

$$x^5 + x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x^5 + x}.$$

Se pune întrebarea: cum verificăm că funcţia $t(x) = \sqrt{x^5 + x}$, cu $x \in (0, +\infty)$, este funcţia inversă a soluţiei $x = x(t)$ a problemei enunţate? Răspunsul este dat de următoarea teoremă:

Teoremă. *Fie $f : I \times J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $x = x(t)$ o soluţie a problemei Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{PC.Dir}$$

definită pe un interval $I' \subset I$. Dacă $f(t_0, x_0) \neq 0$, atunci funcţia $x = x(t)$ este inversabilă local în vecinătatea lui t_0 şi funcţia sa inversă, $t = t(x)$, este o soluţie a problemei Cauchy

$$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{f(t,x)} \\ t(x_0) = t_0. \end{cases} \tag{PC.Inv}$$

Demonstraţie. Fie $x = \tilde{x}(t)$, cu $\tilde{x} : I' \subset I \to J' \subset J$, o soluţie a problemei (PC.Dir), deci o funcţie de clasă C^1 pentru care

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(t, \tilde{x}(t)), \ \forall t \in I',$$

cu $\tilde{x}(t_0) = x_0$. Rezultă că $\tilde{x}'(t_0) = f(t_0, \tilde{x}(t_0)) = f(t_0, x_0) \neq 0$ şi, din Teorema de inversare locală, obţinem că funcţia $\tilde{x}$ este inversabilă în vecinătatea lui t_0 şi notăm inversa sa cu $\tilde{t}$, adică avem echivalenţa

$$x = \tilde{x}(t) \Leftrightarrow t = \tilde{t}(x)$$

pentru $t \in I'' \subset I'$ şi $x \in J'' \subset J'$.

Din formula de derivare a funcţiei inverse avem:

$$\frac{d\tilde{t}}{dx}(x) = \frac{1}{\dfrac{d\tilde{x}}{dt}(\tilde{t}(x))} = \frac{1}{f(\tilde{t}(x), \tilde{x}(\tilde{t}(x))} = \frac{1}{f(\tilde{t}(x), x)}$$

pentru orice $x \in J''$, şi, cum $x_0 = \tilde{x}(t_0) \Leftrightarrow t_0 = \tilde{t}(x_0)$, urmează că $t = \tilde{t}(x)$ este o soluţie pentru *problema Cauchy a funcţiei inverse*, (PC.Inv).

Observaţie. Teorema de mai sus justifică următorul calcul formal de trecere de la ecuaţia diferenţială a funcţiei directe, $x = x(t)$, la ecuaţia diferenţială a funcţiei inverse, $t = t(x)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}.$$

Mai mult, acest calcul formal permite ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi în două variabile, t şi x, să poată fi enunţată sub *forma simetrică*

$$a(t, x)dt + b(t, x)dx = 0,$$

formă care poate fi explicitată ca

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a(t, x)}{b(t, x)}$$

pentru funcţia necunoscută $x = x(t)$, sau ca

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{b(t, x)}{a(t, x)},$$

pentru funcţia necunoscută $t = t(x)$.

Să revenim la exemplul iniţial: ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{5x^4 + 1}$$

are forma simetrică

$$2tdt - (5x^4 + 1)dx = 0,$$

iar ecuaţia funcţiei inverse este

$$\frac{dt}{dx} = \frac{5x^4 + 1}{2t}.$$

Să verificăm acum soluţia găsită, $t(x) = \sqrt{x^5 + x}$. Avem

$$t'(x) = \frac{5x^4 + 1}{2\sqrt{x^5 + x}} = \frac{5x^4 + 1}{2t(x)}, \ \forall x \in (0, +\infty),$$

aşa cum era de aşteptat.

§3. Ecuaţii omogene. Ecuaţiile de forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right), \tag{EO}$$

numite *ecuaţii omogene în sensul lui Euler*, se rezolvă cu substituţia

$$u = \frac{x}{t}$$

care le transformă în ecuaţii cu variabile separabile.

Într-adevăr, din $x = tu$ rezultă $x' = u + tu'$ şi ecuaţia devine $u + tu' = h(u)$. Scrisă sub forma

$$\frac{du}{dt} = \frac{h(u) - u}{t},$$

aceasta este, evident, o ecuaţie cu variabile separabile. Am justificat teorema:

Teoremă. *Dacă $h : I \to \mathbb{R}$ este continuă şi $h(u) \neq u$ pentru orice $u \in I$, atunci soluţia generală a ecuaţiei* (EO) *este dată de*

$$x(t) = tu(t)$$

pentru $t \neq 0$, unde $u = u(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile

$$u' = \frac{1}{t}\left(h(u) - u\right).$$

Exemplu: Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei

$$tx' = x + te^{-\frac{x}{t}},\ t > 0.$$

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma

$$x' = \frac{x}{t} + e^{-\frac{x}{t}},$$

şi constatăm că este o ecuaţie omogenă, prin urmare efectuăm substituţia

$$u = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = tu$$

de unde, prin derivare în raport cu t, obţinem

$$x' = u + tu'.$$

Nu uitaţi că, dacă x este funcţie de t, mai precis $x = x(t)$, atunci şi u este funcţie de t, $u = u(t)$.

Mai departe aplicăm aceste substituţii şi obţinem ecuaţia

$$x' = \frac{x}{t} + e^{-\frac{x}{t}} \Leftrightarrow\ u + tu' = u + e^{-u} \Leftrightarrow\ t\frac{du}{dt} = e^{-u}$$

care este cu variabile separabile, aşa cu era de aşteptat. Separăm variabilele

$$e^{u}du = \frac{dt}{t}$$

integrăm

$$\int e^u du = \int \frac{dt}{t}$$

şi avem

$$e^u = \ln t + c$$

$$u = \ln(\ln t + c)$$

de unde, revenind în substituţie, obţinem soluţia generală

$$x = t \ln(\ln t + c).$$

Observaţie: dacă înlocuim constanta arbitrară c cu $\ln C$, unde C este tot o constanţa arbitrară, formula de mai sus capătă forma

$$x = t \ln \ln Ct.$$

Recomand începătorilor să verifice acum, direct în ecuaţia iniţială, soluţia găsită prin derivare. Iată cum: calculăm mai întâi membrul stâng al ecuaţiei

$$tx' = t\,(t \ln \ln Ct)' = t\left(\ln \ln Ct + t \cdot \frac{1}{\ln Ct} \cdot \frac{1}{Ct} \cdot C\right) = t \ln \ln Ct + \frac{t}{\ln Ct}.$$

şi apoi membrul drept

$$x + te^{-\frac{x}{t}} = t \ln \ln Ct + te^{-\ln \ln Ct} = t \ln \ln Ct + te^{\ln \frac{1}{\ln Ct}} = t \ln \ln Ct + \frac{t}{\ln Ct}.$$

Se vede clar că ecuaţia este verificată.

Observaţie. Denumirea de *ecuaţie omogenă* pentru acest tip de ecuaţie este dată de faptul că, scrisă la forma simetrică, o ecuaţie este de acest tip dacă şi numai dacă coeficienţii diferenţialelor sunt *funcţii omogene în sensul lui Euler* de acelaşi grad:

$$a(t,x)dt + b(t,x)dx = 0 \text{ este (EO)} \Leftrightarrow \exists p \text{ a. î. } \begin{cases} a(\lambda t, \lambda x) = \lambda^p a(t,x) \\ b(\lambda t, \lambda x) = \lambda^p b(t,x), \end{cases} \quad \forall \lambda > 0.$$

Exemplu: Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei

$$(t^2 + x^2)dt - txdx = 0,\ t > 0, x > 0.$$

Rezolvare. Observăm că forma diferenţială

$$(t^2 + x^2)dt - txdx$$

are coeficienţii funcţii omogene de grad 2, deci ecuaţia dată este omogenă. Explicităm ecuaţia alegând, de exemplu, variabila x ca funcţie de t

$$(t^2 + x^2)dt - txdx = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{tx} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} + \frac{x}{t},$$

observăm că într-adevăr este o ecuaţie omogenă, prin urmare efectuăm substituţia

$$x = tu, \quad x' = u + tu'$$

şi obtinem ecuaţia cu variabile separabile

$$u + tu' = u + \frac{1}{u}$$

$$t\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}$$

pe care o integrăm astfel:

$$u\,du = \frac{dt}{t} \;\Leftrightarrow\; \int u\,du = \int \frac{dt}{t} \;\Leftrightarrow\; \frac{u^2}{2} = \ln Ct.$$

Revenim în substituţie, ţinem cont de precizarea $x > 0$ şi obţinem soluţia generală

$$x = t\sqrt{2\ln(Ct)}.$$

Observaţie. Integrarea unei ecuaţii diferenţiale scrisă la forma simetrică se poate face şi fără explicitarea ei, aplicând direct regula de deferenţiere formală a unui câmp scalar, pe care o amintesc aici: diferenţiala formală dv a lui

$$v = v(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

este

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{\partial v}{\partial u_2}\,du_2 + \cdots + \frac{\partial v}{\partial u_n}\,du_n.$$

Revenim la exemplul precedent, diferenţiem substituţia

$$x = tu \;\rightarrow\; dx = u\,dt + t\,du$$

şi înlocuim direct în forma simetrică a ecuaţiei:

$$(t^2 + x^2)dt - txdx = 0 \leftrightarrow\; (t^2 + t^2u^2)dt - t^2u(u\,dt + t\,du) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\; t^2\,dt - t^3u\,du = 0 \leftrightarrow\; dt - tu\,du = 0 \leftrightarrow\; \frac{dt}{t} = u\,du.$$

Observăm că am ajuns la aceeaşi ecuaţie cu variabile separabile ca mai sus.

Ecuaţii reductibile la EO. O ecuaţie de forma

$$x' = h\left(\frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right),$$

este reductibilă la o ecuaţie omogenă prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0, \end{cases}$$

unde $a_{11}x_0 + a_{12}t_0 + b_1 = 0$ şi $a_{21}x_0 + a_{22}t_0 + b_2 = 0$.