Cursul 3

Ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi (continuare)

§4. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi. Considerăm ecuaţia

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{ELN}$$

cu $a, b : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe intervalul I.

În cazul în care b este funcţia nulă,

$$x' = a(t)x, \tag{ELO}$$

spunem că avem o *ecuaţie liniară omogenă*, (ELO), altfel avem o *ecuaţie liniară neomogenă*, (ELN).

Aceste denumiri sunt datorate faptului că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (ELO) se organizează în mod natural ca *spaţiu liniar*, mai precis, în cazul de faţă, ca subspaţiu în $C^1(I, \mathbb{R})$.

Este uşor de văzut că, dacă $x = \varphi(t)$ şi $x = \psi(t)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei (ELO), atunci orice *combinaţie liniară* a lor, $x = \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t)$ verifică ecuaţia dată. Într-adevăr, avem:

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)' = \alpha\varphi' + \beta\psi' = \alpha a(t)\varphi + \beta a(t)\psi = a(t)(\alpha\varphi + \beta\psi).$$

Spre deosebire de cazurile studiate până acum, în care existenţa soluţiilor avea un caracter local, soluţiile ecuaţiilor liniare sunt *globale*, adică sunt definite pe întreg intervalul pe care sunt definite funcţiile coeficient. Mai precis:

Teoremă. *Dacă a şi b sunt continue pe I, atunci, pentru orice $t_0 \in I$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}$, problema Cauchy*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{PC}$$

are soluţie unică, definită pe întreg intervalul I, dată de aşa numita formulă a variaţiei constantelor

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\, d\tau} b(s)\, ds\Big),\ \forall t \in I. \tag{FVC}$$

Demonstraţie. *Etapa I, forma soluţiei.* Fie $x = x(t)$ o soluţie a problemei (PC), definită pe un interval I_0 care îl conţine pe t_0. Avem relaţia

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t),\ \forall t \in I_0,$$

pe care o amplificăm cu $e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}$ şi, ţinând cont că

$$\Big(e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\Big)' = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\big(-\textstyle\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\big)' = -a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau},$$

obţinem
$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}\right)=b(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}.$$
Integrăm de la t_0 la t, avem
$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}-x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t_0}a(\tau)\,d\tau}=\int_{t_0}^{t}b(s)e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)\,d\tau}ds.$$
adică
$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}=x_0+\int_{t_0}^{t}b(s)e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)\,d\tau}ds.$$
relaţie care, amplificată acum cu $e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}$ ne dă forma dată de formula variaţiei constantelor.

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie $x=x(t)$ funcţia dată de (FVC), definită pe întreg intervalul I. Derivăm şi obţinem
$$x'(t)=a(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}\Big(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)\,d\tau}b(s)\,ds\Big)+$$
$$e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}\Big(0+e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau}b(t)\Big)=$$
$$a(t)x(t)+b(t),\ \forall t\in I.$$

Concluzie. Problema Cauchy (PC) admite o singură soluţie, şi anume funcţia $x=x(t)$ dată de (FVC), soluţie definită pe întreg intervalul I.

Exemplul 1: Să se rezolve problema Cauchy
$$\begin{cases}x'=\dfrac{x}{t}+2\ln t,\\ x(1)=13.\end{cases}$$

Rezolvarea 1. Aplicăm teorema. Avem coeficienţii $a(t)=\frac{1}{t}$ şi $b(t)=2\ln t$, $a,b:I=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, şi datele iniţiale $t_0=1$ şi $x_0=2$. Calculăm
$$\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau=\int_{1}^{t}\frac{1}{\tau}d\tau=\ln t-\ln 1=\ln t$$
şi
$$\int_{t_0}^{t}e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{s}a(\tau)\,d\tau}b(s)\,ds=2\int_{1}^{t}e^{-\ln s}\ln s\,ds=2\int_{1}^{t}\frac{\ln s}{s}\,ds=\ln^2 t-\ln^2 1=\ln^2 t.$$
Aplicând formula variaţiei constantelor, obţinem
$$x(t)=e^{\ln t}(13+\ln^2 t)=t(13+\ln^2 t),\ \forall t\in(0,+\infty).$$

Rezolvarea 2. Calcul formal. Aplicăm formula variaţiei constantelor scrisă sub forma
$$x=e^{\displaystyle\int a(t)dt}\Big(C+\int e^{-\displaystyle\int a(t)dt}b(t)dt\Big),$$

în care prin integrala $\int a(t)dt$ înţelegem o singură primitivă a funcţiei a, la fel şi pentru cealaltă integrală.

Avem
$$\int a(t)dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t$$
şi
$$\int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt = 2\int e^{-\ln t} \ln t\, dt = 2\int \frac{\ln t}{t}\, dt = \ln^2 t.$$

Obţinem soluţia generală
$$x = e^{\ln t}(C + \ln^2 t) = t(C + \ln^2 t)$$
din care, determinând constanta C din condiţia $x(1) = 13$, deducem soluţia problemei Cauchy:
$$x(t) = t(13 + \ln^2 t),\ \forall t \in (0, +\infty).$$

Exemplul 2: Integraţi ecuaţia
$$x' = \frac{2}{t^2 - 1}x + \frac{t-1}{t^2+1},\ t > 1.$$

Avem o ecuaţie liniară $x' = a(t)x + b(t)$. Lucrăm formal:
$$a(t) = \frac{2}{t^2-1} \ \rightarrow \ \int a(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} \ \rightarrow e^{\int a(t)\, dt} = \frac{t-1}{t+1},$$
$$b(t) = \frac{t-1}{t^2+1} \ \rightarrow \ \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot \frac{t-1}{t^2+1}\, dt =$$
$$= \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t$$
Prin urmare, din formula variaţiei constantelor, obţinem soluţia generală
$$x = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt\right) = \frac{t-1}{t+1}\left(C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t\right).$$

Exemplul 3: Integraţi ecuaţia
$$x' = \frac{x}{x^2 + t}.$$

Rezolvare. Trecem la ecuaţia diferenţială a funcţiei inverse
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2+t} \ \rightarrow \ \frac{dt}{dx} = \frac{x^2+t}{x} \ \rightarrow \ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}t + x$$
şi observăm că obţinem o ecuaţie de forma
$$t' = a(x)t + b(x),$$
deci o ecuaţie diferenţială liniară cu funcţia necunoscută $t = t(x)$.

Aplicăm algoritmul de rezolvare

$$a(x) = \frac{1}{x} \;\to\; \int a(x)\,dx = \ln x \;\to\; e^{\int a(x)\,dx} = x,$$

$$b(x) = x \;\to\; \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx = \int e^{\ln x} \cdot x\,dx = \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = \int dx = x$$

şi obţinem soluţia generală

$$t = e^{\int a(x)dx}\left(C + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx\right) = x(C + x).$$

Propunem cititorului ca, pe baza acestei formule generale, să rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2 + t} \\ x(2) = 1 \end{cases}$$

şi să verifice direct în ecuaţie soluţia găsită[1].

§5. Ecuaţii Bernoulli.

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha \qquad \text{(E.Bernoulli)}$$

cu $a, b : I \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Teoremă. *Dacă $a, b : I \to \mathbb{R}$ sunt continue şi neidentic nule pe I şi $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ atunci x este o soluţie pozitivă a ecuaţiei* (E.Bernoulli) *dacă şi numai dacă funcţia y, definită prin*

$$y = x^{1-\alpha}$$

este o soluţie pozitivă a ecuaţiei liniare

$$y' = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t).$$

Justificare. Împărţim ecuaţia dată prin x^α

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha \;\to\; x^{-\alpha}x' = a(t)x^{1-\alpha} + b(t),$$

notăm $y = x^{1-\alpha}$ şi avem $y' = (1 - \alpha)x^{-\alpha}x'$, amplificăm acum ecuaţia cu $(1 - \alpha)$ şi efectuăm substituţiile. Obţinem

$$(1-\alpha)x^{-\alpha}x' = (1-\alpha)a(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t) \;\to\; y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t).$$

Observaţie.

$$y = x^{1-\alpha} \Leftrightarrow y^{\frac{1}{1-\alpha}} = x$$

[1] Se găseşte $x(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{4t + 1} - 1),\; t \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$.

Exemplu. Integraţi ecuaţia

$$x' = \frac{1}{t}x + t^2\sqrt[3]{x},\ t > 0.$$

Rezolvare. Avem o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = \frac{1}{3}$. Amplificăm ecuaţia cu $x^{-\frac{1}{3}}$ şi obţinem

$$x' = \frac{1}{t}x + t^2\sqrt[3]{x} \ \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{3}}x' = \frac{1}{t}x^{\frac{2}{3}} + t^2.$$

Efectuăm substituţia

$$y = x^{\frac{2}{3}} \ \rightarrow \ y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}x'$$

şi avem în contiunare

$$x^{-\frac{1}{3}}x' = \frac{1}{t}x^{\frac{2}{3}} + t^2 \ \rightarrow \ \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}x' = \frac{2}{3t}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2t^2}{3} \ \rightarrow \ y' = \frac{2}{3t}\,y + \frac{2t^2}{3}.$$

Am obţinut o ecuaţie liniară în $y = y(t)$ cu

$$a(t) = \frac{2}{3t} \ \rightarrow \int a(t)\,dt = \int \frac{2}{3t}\,dt = \frac{2}{3}\ln t \ \rightarrow e^{\int a(t)\,dt} = e^{\ln t^{\frac{2}{3}}} = t^{\frac{2}{3}},$$

$$b(t) = \frac{2t^2}{3} \ \rightarrow \int e^{-\int a(t)\,dt}b(t)\,dt = \frac{2}{3}\int t^{-\frac{2}{3}} \cdot t^2\,dt = \frac{2}{3}\int t^{\frac{4}{3}}\,dt = \frac{2}{7}\,t^{\frac{7}{3}}.$$

Prin urmare

$$y = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt}b(t)dt\right) = t^{\frac{2}{3}}\left(C + \frac{2}{7}\,t^{\frac{7}{3}}\right),$$

de unde, inversând substituţia efectuată

$$y = x^{\frac{2}{3}} \ \rightarrow y^{\frac{3}{2}} = x,$$

obţinem soluţia generală

$$x = t\left(C + \frac{2}{7}\,t^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

§6. Ecuaţii Riccati. Considerăm ecuaţia

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t), \qquad \text{(E. Riccati)}$$

cu $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue.

Acest tip de ecuaţie nu este rezolvabil prin cuadraturi în general, totuşi, în cazul în care cunoaştem o singură soluţie le putem afla pe toate celelalte, conform teoremei următoare.

Teoremă. *Fie $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue cu b şi c neidentic nule pe I. Dacă $\varphi : J \to \mathbb{R}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei* (E. Riccati), *atunci soluţia generală a ecuaţiei* (E. Riccati) *pe J este dată de*

$$x = y + \varphi(t),$$

unde y este soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli

$$y' = (a(t) + 2b(t)\varphi(t))y + b(t)y^2.$$

Demonstraţia este simplă şi este lăsată citiorului.
Observaţie. Ecuaţia Bernoulli la care se ajunge are exponentul $\alpha = 2$, deci se rezolvă mai departe cu substituţia

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-1} = \frac{1}{y} \ \leftrightarrow \ y = \frac{1}{z},$$

prin urmare, efectuând direct în ecuaţia iniţială substituţia compusă

$$x = \frac{1}{z} + \varphi$$

obţinem o ecuaţie liniară în $z = z(t)$.

Exemplu: Verificaţi că funcţia $\varphi(t) = t$ este o soluţie a ecuaţiei

$$x' = \frac{1}{t}x + x^2 - t^2, \ t > 0,$$

şi apoi aflaţi toate celelalte soluţii.

Rezolvare. Înlocuim $x = t$ în ecuaţie şi avem

$$1 = \frac{1}{t} \cdot t + t^2 - t^2 \ \Leftrightarrow \ 1 = 1,$$

deci funcţia dată este o soluţie. Efectuăm prin urmare substituţia

$$x = \frac{1}{z} + \varphi = \frac{1}{z} + t \quad \to \ x' = -\frac{z'}{z^2} + 1,$$

şi obţinem

$$x' = \frac{1}{t}x + x^2 - t^2 \ \to \ -\frac{z'}{z^2} + 1 = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{z} + t\right) + \left(\frac{1}{z} + t\right)^2 - t^2 \ \to$$

$$-\frac{z'}{z^2} + 1 = \frac{1}{tz} + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2t}{z} + t^2 - t^2 \ \to \ -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{tz} + \frac{2t}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Amplificăm cu $-z^2$ şi obţinem ecuaţia

$$z' = -\left(\frac{1}{t} + 2t\right)z - 1,$$

care este o ecuaţie liniară în $z = z(t)$. O rezolvăm

$$a(t) = -\frac{1}{t} - 2t \ \rightarrow \int a(t)\,dt = -(\ln t + t^2) \ \rightarrow e^{\int a(t)\,dt} = \frac{1}{e^{\ln t + t^2}} = \frac{1}{te^{t^2}},$$

$$b(t) = -1 \ \rightarrow \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt = -\int te^{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\,e^{t^2}.$$

Obţinem

$$z = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt\right) = \frac{1}{te^{t^2}}\left(C - \frac{1}{2}\,e^{t^2}\right),$$

şi am găsit astfel soluţia generală a ecuaţiei iniţiale sub forma

$$x = \frac{te^{t^2}}{C - \frac{1}{2}e^{t^2}} + t.$$

§7. Ecuaţii cu diferenţiale exacte

Fie D un domeniu (adică o mulţime nevidă, deschisă şi conexă) din $\mathbb{R}^2$ şi fie $g, h : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 pe D, cu $h(t,x) \neq 0$ pe D. O ecuaţie de forma

$$g(t,x)dt + h(t,x)dx = 0, \qquad \text{(EDE)}$$

se numeşte *cu diferenţială exactă* dacă există o funcţie de clasă C^2, $F : D \to \mathbb{R}$, astfel încât diferenţiala sa formală dF să verifice egalitatea

$$dF(t,x) = g(t,x)dt + h(t,x)dx,$$

adică

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = g(t,x) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x) \end{cases} \qquad (*)$$

pentru orice $(t,x) \in D$.

În acest caz se spune că *forma diferenţială* $\omega = g(t,x)dt + h(t,x)dx$ este *exactă* şi că F este o *primitivă* a ei.

Teorema 1. *Dacă* (EDE) *este o ecuaţie cu diferenţială exactă, atunci soluţia ei generală este definită implicit de ecuaţia*

$$F(t,x) = c,$$

unde $F : D \to \mathbb{R}$ verifică sistemul (*)*, iar c este o constantă arbitrară.*

Demonstraţie. Fie F o primitivă a formei diferenţiale $\omega = g(t,x)dt + h(t,x)dx$, şi fie $x = x(t)$ o soluţie a ecuaţiei (EDE) definită pe un interval I. Aceasta înseamnă că funcţia x este de clasă C^1 pe I şi verifică ecuaţia

$$g(t,x(t)) + h(t,x(t))\frac{dx}{dt}(t) = 0, \ \forall t \in I.$$

Calculăm
$$\frac{d}{dt}F(t,x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t))\frac{dx}{dt}(t) =$$
$$= g(t,x(t)) + h(t,x(t))\frac{dx}{dt}(t) = 0,\ \forall t \in I,$$
şi, prin urmare, $F(t,x(t)) = \text{const.}$ pe I, aşa cum trebuia arătat.

Teorema 2. *Dacă D este un domeniu simplu conex, atunci o condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia* (EDE) *să fie cu diferenţială exactă este ca*
$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,x), \tag{**}$$
pentru orice $(t,x) \in D$.

Demonstraţie. Vom considera aici numai cazul când D este un dreptunghi de forma $D = I \times J$, cu I şi J două intervale deschise, cazul general poate fi găsit în orice tratat de analiză matematică care studiază problema independenţei de drum a integralei curbilinii de speţa a II-a.

Necesitatea condiţiei (**). Fie F o primitivă de clasă C^2 a formei diferenţiale ω. Conform teoremei lui Schwarz, derivatele mixte de ordin doi comută, şi avem implicaţia
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}g = \frac{\partial}{\partial t}h.$$

Suficienţa condiţiei (**). Presupunem că este îndeplinită condiţia (**) şi vrem să arătăm că există o funcţie $F \in C^2(D)$ astfel încât să aibă loc relaţiile (*).

Fixăm un t_0 arbitrar în I şi, pentru fiecare $x \in J$, integrăm prima relaţie după variabila t. Avem
$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = g(t,x) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial t}(\tau,x)d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau,x)d\tau$$
$$\Rightarrow F(t,x) - F(t_0,x) = \int_{t_0}^{t} g(\tau,x)d\tau,\ \forall t \in I.$$
Notăm $F(t_0,x) = c(x)$ şi am obţinut următoarea formă a funcţiei F:
$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} g(\tau,x)d\tau + c(x),\ \forall (t,x) \in I \times J, \tag{***}$$
unde $t_0 \in I$ este fixat arbitrar şi c este o funcţie de clasă C^2 pe J.

Vom arăta că se poate determina o funcţie c astfel încât funcţia F de forma (***) să satisfacă sistemul (*). Se constată uşor, prin derivare în raport cu t, că F satisface prima ecuaţie din (*), pentru orice funcţie c. A doua ecuaţie este echivalentă cu
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\partial g}{\partial x}(\tau,x)d\tau + c'(x) = h(t,x) \Leftrightarrow c'(x) = \alpha(t,x),$$

pentru orice $(t,x) \in I \times J$, unde am notat

$$\alpha(t,x) = h(t,x) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial g}{\partial x}(\tau, x) d\tau.$$

Pentru a justifica existenţa funcţiei c, este suficient să arătăm că α nu depinde de variabila t. Pentru fiecare $x \in J$ fixat, derivăm în raport cu t şi, din condiţia (**), obţinem

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = 0,$$

pentru orice $t \in I$, deci $\alpha(t,x)$ este egală cu o constantă $a(x)$ pentru t din intervalul I. Cum $\alpha = a$ este în mod evident de clasă C^1, rezultă că, pentru orice x_0 fixat în J, integrala

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi, \; x \in J,$$

este de clasă C^2 şi astfel funcţia F corespunzătoare acestei alegeri a lui c este primitiva căutată.

Exemplu: Să se integreze ecuaţia

$$x' = \frac{2t - x^2}{2tx - 3x^2}$$

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma simetrică

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t - x^2}{2tx - 3x^2} \Leftrightarrow (2t - x^2)dt + (3x^2 - 2tx)dx = 0,$$

şi verificăm dacă este cu diferenţială exactă: derivatele parţiale

$$\frac{\partial}{\partial x}(2t - x^2) = -2x \;\; \text{şi} \;\; \frac{\partial}{\partial t}(3x^2 - 2tx) = -2x$$

sunt egale, deci condiţia (**) este îndeplinită.

Căutăm o funcţie F astfel încât

$$dF = (2t - x^2)dt + (3x^2 - 2tx)dx,$$

adică

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = 2t - x^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2tx. \end{cases}$$

Din prima ecuaţie obţinem forma funcţiei F

$$F(t,x) = \int (2t - x^2) dt = t^2 - tx^2 + c(x),$$

unde $c = c(x)$ este o funcţie constantă în raport cu t, funcţie pe care o găsim impunând să fie satisfăcută a doua ecuaţie:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2tx \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x}\left(t^2 - tx^2 + c(x)\right) = 3x^2 - 2tx \;\rightarrow$$

$$-2tx + c'(x) = 3x^2 - 2tx \;\to\; c'(x) = 3x^2.$$

Prin urmare avem

$$c(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c_0,$$

alegem $c_0 = 0$ şi obţinem primitiva

$$F(t,x) = t^2 - tx^2 + x^3.$$

În final, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale considerate este

$$t^2 - tx^2 + x^3 = c.$$

Propunem cititorului să expliciteze soluţia sub forma $t = t(x)$ (sau $x = x(t)$ dacă ştie cum) şi să verifice soluţia în ecuaţia iniţială.

§8. Ecuaţii Lagrange. Considerăm ecuaţia

$$x = t\varphi(x') + \psi(x') \tag{E.Lagrange}$$

unde φ şi ψ sunt două funcţii de clasă C^2, cu $\varphi(p) \neq p$ pe intervalul comun de definiţie.

Să observăm de la bun început că ecuaţia dată nu este la *forma normală*, adică de tipul $x' = f(t,x)$, ci este de tipul $x = g(t,x')$.

Prezentăm pe scurt modul de rezolvare. Fie $x \in C^2$ o soluţie. Derivăm:

$$x' = \varphi(x') + t\varphi'(x')\,x'' + \psi'(x')\,x'',$$

notăm $x' = p$, avem $x'' = \frac{dp}{dt}$, iar ecuaţia devine

$$p - \varphi(p) = (t\varphi'(p) + \psi'(p))\,\frac{dp}{dt},$$

cu funcţia necunoscută $p = p(t)$. Trecem la ecuaţia funcţiei inverse şi obţinem ecuaţia liniară

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

cu funcţia necunoscută $t = t(p)$. Presupunem că reuşim să calculăm cele două integrale care apar în formula variaţiei constantelor, şi obţinem soluţia generală sub forma

$$t = \theta(p,c).$$

Mai departe, atenţie!, nu ne întoarcem în sustituţie (adică nu integrăm familia de ecuaţii diferenţiale $t = \theta(x',c)$) ci aplicăm *metoda parametrului*: am obţinut variabila t ca funcţie de p, ne întoarcem direct în ecuaţia iniţială şi obţinem şi variabila x ca funcţie de p:

$$x = \theta(p,c)\varphi(p) + \psi(p).$$

În final avem soluţiile (E.Lagrange) sub formă parametrică:

$$\begin{cases} t = \theta(p,c) \\ x = \theta(p,c)\varphi(p) + \psi(p), \quad p \in I \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

cu c o constantă arbitrară.

Exemplu: Să se integreze ecuaţia

$$x = \frac{1}{2}tx' + x'^3.$$

Rezolvare. Derivăm

$$x = \frac{1}{2}tx' + x'^3 \;\to\; x' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}tx'' + 3x'^2x'' \;\to\; \frac{1}{2}x' = \left(\frac{1}{2}t + 3x'^2\right)x''$$

Notăm

$$x' = p \;\to\; x'' = \frac{dp}{dt}$$

şi avem

$$p = \left(t + 6p^2\right)\frac{dp}{dt},$$

de unde, trecând la ecuaţia diferenţială a funcţiei inverse, obţinem ecuaţia liniară în $t = t(p)$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{t}{p} + 6p$$

pe care o integrăm cu formula variaţiei constantelor:

$$a(p) = \frac{1}{p} \;\to \int a(p)\,dp = \ln p \;\to e^{\int a(p)\,dp} = p,$$

$$b(p) = 6p \;\to \int e^{-\int a(p)\,dp} b(p)\,dp = 6\int \frac{1}{p}\cdot p\,dp = 6\int dp = 6p.$$

Obţinem

$$t = e^{\int a(p)dp}\left(c + \int e^{-\int a(p)dp} b(p)dp\right) = p\left(c + 6p\right).$$

Mai departe pe x îl obţinem înlocuind $x' = p$ şi $t = t(p)$ în ecuaţia iniţială:

$$x = \frac{1}{2}tx' + x'^3 = \frac{1}{2}p^2(c + 6p) + p^3,$$

astfel încât am găsit soluţia sub forma parametrică

$$\begin{cases} t = p(c + 6p) \\ x = \frac{1}{2}p^2(c + 6p) + p^3, \quad p \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Observaţie. Metoda parametrului aplicată mai sus poate fi încercată pentru orice ecuaţie de tipul

$$x = g(t, x'),$$

pentru că prin derivare variabila x dispare. Totuşi, metoda are succes numai dacă ecuaţia obţinută în variabilele p şi t este integrabilă. Forma specială a ecuaţiei Lagrange garantează acest lucru.

§9. Ecuaţii Clairaut. Considerăm ecuaţia

$$x = tx' + \psi(x') \qquad \text{(E.Clairaut)}$$

cu $\psi = \psi(p)$ o funcţie de clasă C^2 pe un anumit interval.

Observăm că ecuaţia dată are forma unei ecuaţii Lagrange, dar este chiar în cazul exceptat $\varphi(p) \equiv p$. Fiind totuşi o ecuaţie de forma $x = g(t, x')$, vom aplica metoda parametrului. Derivăm şi obţinem

$$x = tx' + \psi(x') \;\to\; x' = x' + tx'' + \psi'(x')'' \;\to\; x''(t + \psi'(x')) = 0,$$

notăm $p = x'$, rezultă $p' = x''$, şi ajungem la ecuaţia

$$p'(t + \psi'(p)) = 0.$$

Avem aici produsul a două funcţii continue egal cu funcţia nulă, şi din proprietăţile funcţiilor continue rezultă că există măcar un subinterval pe care unul dintre factori este funcţia nulă.

Cazul $p' = 0$ conduce la $p = c$, funcţia constantă, şi din forma ecuaţiei găsim soluţia generală

$$x = ct + \psi(c), c \in \mathbb{R},$$

care, cum se vede, este o familie de drepte parametrizată după panta $c \in \mathbb{R}$.

Cazul $t + \psi'(p) = 0$ conduce la soluţia singulară exprimată parametric sub forma

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p), \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observaţie. Să determinăm tangenta la curba Γ la un moment p oarecare. Avem pe rând ecuaţia tangentei sub următoarele forme

$$\frac{x - x(p)}{\frac{dx}{dp}(p)} = \frac{t - t(p)}{\frac{dt}{dp}(p)}$$

$$\frac{x + p\psi'(p) - \psi(p)}{-\psi'(p) - p\psi''(p) + \psi'(p)} = \frac{t + \psi'(p)}{-\psi''(p)}$$

$$\frac{x + p\psi'(p) - \psi(p)}{-p\psi''(p)} = \frac{t + \psi'(p)}{-\psi''(p)}$$

$$x + p\psi'(p) - \psi(p) = pt + p\psi'(p)$$

$$x = pt + \psi(p).$$

Am arătat astfel că orice tangentă la Γ face parte din familia de drepte dată de soluţia generala ecuaţiei, prin urmare soluţia singulară este *înfăşurătoarea* acestei familii de drepte.

Exemplu: Să se integreze ecuaţia

$$x = tx' - \ln x'.$$

Rezolvare. Este o ecuaţie Clairaut, derivăm şi obţinem

$$x = tx' - \ln x' \;\rightarrow\; x' = x' + tx'' - \frac{x''}{x'} \;\rightarrow\; x''\left(t - \frac{1}{x'}\right) = 0.$$

În cazul $x'' = 0$ rezultă $x' = c$ şi din ecuaţia dată deducem soluţia generală

$$x = ct - \ln c,\;\; c \in \mathbb{R}_+^*.$$

În cazul $t - \frac{1}{x'} = 0$ notăm $x' = p$, prin urmare avem

$$t = \frac{1}{p}$$

şi

$$x = tx' - \ln x' = \frac{1}{p} \cdot p - \ln p = 1 - \ln p$$

Am găsit pentru soluţia singulară parametrizarea

$$\begin{cases} t = \frac{1}{p} \\ x = 1 - \ln p, \quad p \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

care poate fi explicitată uşor prin eliminarea parametrului p, şi obţinem

$$x = 1 + \ln t,\;\; t \in (0, +\infty).$$

În Figura 1 este trasată cu albastru familia dreptelor dată de soluţia generală, iar graficul soluţiei singulare este trasat cu roşu.

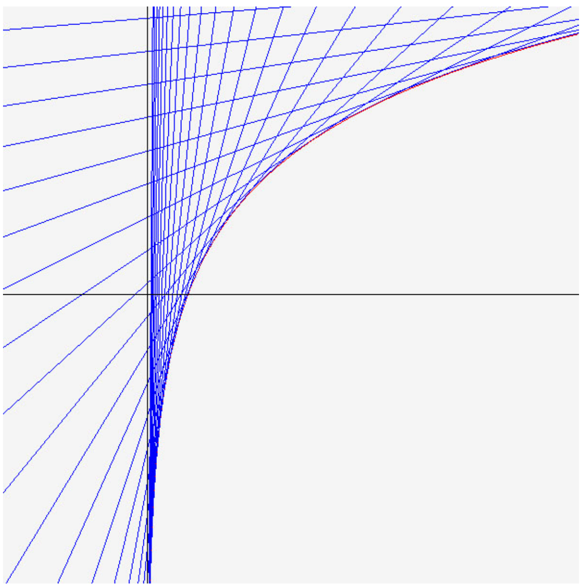

Figura 1: Ecuaţia Clairaut $x = tx' - \ln x'$.

Inegalităţi integrale

§1. Lema lui Gronwall

Lema 1. (Gronwall) *Fie $m \in \mathbb{R}$ şi fie x şi k două funcţii continue pe un interval $I = [\,a, b\,]$ cu $k(t) \geq 0$ pentru orice $t \in I$. Dacă*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds, \ \forall t \in [\,a, b\,], \tag{1}$$

atunci

$$x(t) \leq m\, e^{\int_a^t k(s)\, ds}, \ \forall t \in [\,a, b\,].$$

Demonstraţie. Fie $x = x(t)$ astfel încât

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds, \ \forall t \in [\,a, b\,].$$

Definim

$$y(t) = m + \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds, \ \forall t \in [\,a, b\,]$$

şi avem

$$y'(t) = k(t)\, x(t), \ \forall t \in (\,a, b\,).$$

Inegalitatea dată se scrie sub forma

$$x(t) \leq y(t)$$

şi o amplificăm cu $k(t) \geq 0$. Obţinem

$$y'(t) \leq k(t)\, y(t), \ \forall t \in [\,a, b\,].$$

Amplificăm acum inegalitatea

$$y'(t) - k(t)\, y(t) \leq 0$$

cu $e^{-\int_a^t k(s)\, ds}$ şi obţinem relaţia

$$y'(t) e^{-\int_a^t k(s)\, ds} - k(t)\, y(t) e^{-\int_a^t k(s)\, ds} \leq 0,$$

adică

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{-\int_a^t k(s)\, ds}\right) \leq 0, \ \forall t \in (\,a, b\,),$$

de unde rezultă că funcţia din paranteza derivată este descrescătoare. Tinând cont că $y(a) = m$, avem

$$y(t)\, e^{-\int_a^t k(s)\, ds} \leq y(a)\, e^{-\int_a^a k(s)\, ds} = m, \ \forall t \in [\,a, b\,],$$

de unde urmează imediat

$$x(t) \leq y(t) \leq m\, e^{\int_a^t k(s)\, ds}, \ \forall t \in [\,a, b\,],$$

adică concluzia lemei.

Observaţie. Este uşor de văzut, prin derivare, că *ecuaţia integrală*

$$w(t) = m + \int_a^t k(s)\,w(s)\,ds,\ \forall t \in [\,a,b\,], \tag{2}$$

este echivalentă cu problema Cauchy

$$w' = k(t)w \text{ cu } w(a) = m,$$

care are ca soluţie funcţia

$$w(t) = m\,e^{-\int_a^t k(s)\,ds},\ \forall t \in [\,a,b\,].$$

Lema lui Gronwall arată că orice soluţie a inecuaţiei (1) este mai mică decât unica soluţie a ecuaţiei (2), aşa cum era de aşteptat.

§2. Lema lui Bellman

Lema 2. (Bellman) *Fie $I = [\,a,b\,]$ şi fie funcţiile h, k şi x continue pe I cu $k(t) \geq 0$ pentru orice $t \in I$. Dacă*

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)x(s)\,ds, \qquad \forall t \in I,$$

atunci

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)k(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)ds, \qquad t \in I.$$

Demonstraţie. Definim

$$y(t) = \int_a^t k(s)x(s)\,ds, \qquad \forall t \in I$$

şi avem

$$y'(t) = k(t)x(t), \qquad \forall t \in I.$$

Din

$$x(t) \leq h(t) + y(t)$$

obţinem prin amplificare cu $k(t) \geq 0$ relaţia

$$y'(t) = x(t)k(t) \leq h(t)k(t) + y(t)k(t), \qquad \forall t \in I,$$

pe care o scriem sub forma

$$y'(t) - y(t)k(t) \leq h(t)k(t)$$

şi o amplificăm cu $\exp\left(-\int_a^t k(\tau)d\tau\right)$. Obţinem

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\exp\left(-\int_a^t k(\tau)d\tau\right)\right) \leq h(t)k(t)\exp\left(-\int_a^t k(\tau)d\tau\right),\ \forall t \in I$$

Integrăm de la a la t, ţinem cont că $y(a) = 0$, obţinem

$$y(t)\exp\left(-\int_a^t k(\tau)d\tau\right) \leq \int_a^t h(s)k(s)\exp\left(-\int_a^s k(\tau)d\tau\right)ds.$$

şi deci

$$x(t) \leq h(t) + y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)k(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)ds,\ \forall t \in I.$$

Lema 3. (Lema de comparaţie) *Fie $I = [\,a, b\,]$ şi fie funcţia x derivabilă pe I şi funcţia k continuă astfel încât*

$$x'(t) \leq k(t)\,x(t), \qquad \forall t \in (a, b).$$

Atunci

$$x(t) \leq x(a)\exp\left(\int_a^t k(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad \forall t \in [\,a, b\,].$$

Demonstraţie. Definim

$$y(t) = \exp\left(\int_a^t k(s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \in I.$$

şi avem că

$$y'(t) = k(t)\,y(t), \qquad t \in (a, b).$$

Urmează că

$$\frac{d}{dt}\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x'(t)\,y(t) - y'(t)\,x(t)}{y^2(t)} = \frac{x'(t)\,y(t) - k(t)\,y(t)\,x(t)}{y^2(t)} \leq 0, \qquad t \in (a, b)$$

de unde obţinem concluzia

$$\frac{x(t)}{y(t)} \leq \frac{x(a)}{y(a)} = x(a), \qquad t \in I.$$

Observaţie. In lema de mai sus nu se cer valori pozitive pentru x sau k. In esenţa, lema compară orice soluţie a inecuaţiei $x' \leq kx$ cu soluţia ecuaţiei $y' = ky$ pentru care $y(a) = 1$.