Cursul 4
(*plan de curs*)

Existenţă şi unicitate locală

§1. Problema Cauchy pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale

Considerăm funcţiile continue $f_i : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, unde Ω este un domeniu nevid (mulţime deschisă şi conexă) din $\mathbb{R}^n$. Prin *sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi* cu n funcţii necunoscute: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, înţelegem sistemul

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Notaţia vectorială. Considerăm funcţii $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

$$x = x(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Limitele, continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea se caracterizează pe componente:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \to t_0} x_1(t) \\ \lim_{t \to t_0} x_2(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \to t_0} x_n(t) \end{pmatrix}, \; x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \; \int_a^t x(s)ds = \begin{pmatrix} \int_a^t x_1(s)ds \\ \int_a^t x_2(s)ds \\ \vdots \\ \int_a^t x_n(s)ds \end{pmatrix}.$$

Normele uzuale

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

sunt echivalente din punct de vedere topologic (induc aceleaşi mulţimi deschise). Diferă numai forma bilelor. De exemplu:

$$\|x\|_\infty \leq r \Leftrightarrow |x_i| \leq r \; \forall i \Leftrightarrow x \in [-r, r] \times \cdots \times [-r, r],$$

prin urmare

$$B_\infty(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ pentru care } \|x\|_\infty \leq r\} = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r].$$

Dacă $x : I \to \mathbb{R}^n$ este continuă atunci şi $\|x\| : I \to \mathbb{R}$ este continuă. Dacă $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este integrabilă Riemann atunci şi $\|x\| : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|x(t)\|dt$$

Analog, considerăm câmpul vectorial $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

Sistemul $(\mathcal{S})$ devine *ecuaţia diferenţială vectorială*

$(\mathcal{E})$ $$x' = f(t,x),\ t \in I \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Problema Cauchy cu datele $\mathcal{D} = (I, \Omega, f, a, \xi)$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi deschisă, $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă, $a \in I$ şi $\xi \in \Omega$, este notată cu

$\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ $$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

şi constă în găsirea unei funcţii de clasă C^1, numită *soluţie*, $x : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$, unde $J \subseteq I$ este un interval cu $a \in J$, satisfăcând *ecuaţia*, adică $x'(t) = f(t, x(t))$ pentru orice $t \in J$, şi *condiţia iniţială*, $x(a) = \xi$.

Tipuri de soluţii. Soluţia $x : J \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ a problemei$\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ este

– *soluţie la dreapta* dacă $J = [\,a, b)$ sau $J = [\,a, b\,]$;
– *soluţie la stânga* dacă $J = (c, a\,]$ sau $J = [\,c, a\,]$;
– *soluţie bilaterală* dacă $\inf J < a < \sup J$;
– *globală* dacă $J = I$, dacă nu: *soluţie locală*;
– *globală la dreapta* dacă $J = I \cap [\,a, +\infty)$;
– *globală la stânga* dacă $J = I \cap (-\infty, a\,]$;
– *continuabilă la dreapta* dacă există o soluţie $y : \tilde{\mathbb{J}} \to \Omega$ cu $\sup J < \sup \tilde{J}$ şi $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in J \cap \tilde{\mathbb{J}}$;
– *saturată la dreapta* dacă nu este continuabilă la dreapta;
– *continuabilă la stânga, saturată la stânga*, analog cu mai sus.

Exemplul 1 Problema Cauchy cu $I = \mathbb{R},\ \Omega = \mathbb{R},\ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t,x) = -2tx^2,\ \ a = 0$ şi $\xi = -1$, adică

$\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, -1)$ $$\begin{cases} x' = -2tx^2 \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

admite soluţia saturată

$$x : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x(t) = \frac{1}{t^2 - 1},$$

care nu este globală.

Propoziţia 1 (*Principiul Concatenării*). *Fie $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $I \times \Omega$, $a, b, c \in I$ cu $a < b < c$ şi $\xi \in \Omega$. Fie $x : [\,a, b\,] \to \Omega$ o soluţie a $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ şi $y : [\,b, c\,] \to \Omega$ o soluţie a $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, b, x(b))$. Atunci, $z : [\,a, c\,] \to \Omega$, obţinută prin concatenarea funcţiilor x şi y,*

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & \text{pentru } t \in [\,a, b\,] \\ y(t), & \text{pentru } t \in (b, c\,], \end{cases}$$

este o soluţie a $\mathcal{PC}(I, f, \Omega, a, \xi)$.

Demonstraţie. Din $y(b) = x(b)$ urmează imediat că z este continuă pe $[\,a, c\,]$ şi derivabilă pe $[\,a, b) \cup (b, c\,]$. Deoarece f este continuă, avem

$$\lim_{t \uparrow b} z'(t) = \lim_{t \uparrow b} x'(t) = \lim_{t \uparrow b} f(t, x(t)) = f(b, x(b))$$

şi

$$\lim_{t \downarrow b} z'(t) = \lim_{t \downarrow b} y'(t) = \lim_{t \downarrow b} f(t, y(t)) = f(b, x(b)).$$

Am arătat deci că există limita

$$\lim_{t \to b} z'(t) = f(b, z(b))$$

şi atunci, aplicând pe componente regula lui l'Hospital în definiţia derivatei, avem, pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$z_i{}'(b) = \lim_{t \to b} \frac{z_i(t) - z_i(b)}{t - b} = \lim_{t \to b} z_i{}'(t) = f_i(b, z(b)),$$

adică $z'(b) = f(b, z(b))$. Urmează imediat că z este de clasă C^1 pe $[\,a, c\,]$ şi verifică ecuaţia pe acest interval, deci este o soluţie a problemei $\mathcal{PC}(I, f, \Omega, a, \xi)$.

Propoziţia 2 (*Principiul Soluţiei Retrograde*). *Fie $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $I \times \Omega$, $a - h, a \in I$ cu $h > 0$ şi $\xi \in \Omega$. Funcţia $x : [\,a - h, a\,] \subset I \to \Omega$ este o soluţie la stânga a problemei $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ dacă şi numai dacă funcţia $y : [\,-a, -a + h\,] \to \Omega$ dată de*

$$y(t) = x(-t)$$

pentru orice $t \in [-a, -a+h]$, este o soluţie la dreapta a problemei $\mathcal{PC}(\tilde{I}, \Omega, g, -a, \xi)$ unde $\tilde{I} = -I$ iar $g : \tilde{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este dată de

$$g(t, x) = -f(-t, x),$$

pentru orice $(t, x) \in \tilde{I} \times \Omega$.

Demonstraţie. Fie $x = x(t)$ o soluţie $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ definită pe $[\,a-h, a\,] \subset I$. Atunci

$$y'(t) = (x(-t))' = -x'(-t) = -f(-t, x(-t)) = -f(-t, y(t)) = g(t, y(t)),$$

pentru orice $t \in [-a, -a + h]$, deci y este soluţie a $\mathcal{PC}(\tilde{I}, \Omega, g, -a, \xi)$. Reciproc, dacă $y = y(t)$ este o soluţie a $\mathcal{PC}(\tilde{I}, \Omega, g, -a, \xi)$ atunci se arată printr-un calcul analog că $x = x(t) = y(-t)$ este o soluţie pentru $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$.

Observaţie. Deoarece orice soluţie bilaterală se obţine prin concatenarea unei soluţii la stânga cu una la dreapta, iar studiul soluţiilor la stânga poate fi redus la studiul soluţiilor la dreapta (dacă şi funcţia g îndeplineşte ipotezele funcţiei f, evident), vom studia în continuare numai soluţii la dreapta.

§2. Teorema lui Picard de existenţă şi unicitate locală

Fixăm $a \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$, $r > 0$, notăm cu $B(\xi, r)$ bila închisă de centru ξ şi rază r, adică

$$B(\xi, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ pentru care } \|x - \xi\| \leq r\},$$

şi definim *cilindrul* $\Delta = [\,a, a + h\,] \times B(\xi, r)$.

Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi. \end{cases} \tag{1}$$

unde $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă oarecare.

Deoarece f este continuă pe mulţimea compactă Δ, ea este mărginită pe Δ, adică există $M > 0$ astfel încât

$$\|f(t, x)\| \leq M \tag{2}$$

pentru orice $(t, x) \in \Delta$.

Teorema 1. (**Picard**) *Fie $f : \Delta = [\,a, a+h\,] \times B(\xi, r) \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe Δ care satisface condiţia Lipschitz pe $B(\xi, r)$, adică există $L > 0$ astfel încât pentru orice $(t, u), (t, v) \in \Delta$, să avem*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|, \tag{3}$$

şi fie

$$\delta = \min\left\{h, \frac{r}{M}\right\}, \tag{4}$$

unde $M > 0$ este dat de relaţia (2).

Atunci pe intervalul $[\,a, a + \delta\,]$ problema Cauchy (1) *are o soluţie unică*

$$x : [\,a, a + \delta\,] \to B(\xi, r)$$

şi aceasta este limita uniformă pe $[\,a, a + \delta\,]$ a şirului de funcţii

$$x_k : [\,a, a + \delta\,] \to B(\xi, r),\ \ k = 0, 1, 2 \ldots,$$

numit şirul aproximaţiilor succesive *asociat problemei Cauchy* (1) *şi definit astfel*

$$\begin{cases} x_0(t) = \xi, \quad \text{pentru } t \in [\,a, a + \delta\,], \\ x_{k+1}(t) = \xi + \displaystyle\int_a^t f(\tau, x_k(\tau))\, d\tau, \quad \text{pentru } t \in [\,a, a + \delta\,], k = 0, 1, 2 \ldots. \end{cases} \tag{5}$$

În plus, are loc următoarea formulă de evaluare a erorii

$$\|x_k(t) - x(t)\| \leq M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k + 1)!}\ , \tag{6}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $t \in [\,a, a + \delta\,]$.

Vom demonstra această teoremă în 5 paşi.

Pasul 1. Arătăm că problema Cauchy (1) este echivalentă cu următoarea *ecuaţie integrală Volterra*

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{7}$$

Într-adevăr, dacă $x = x(t)$ este o soluţie a problemei Cauchy (1) pe un interval $[\, a, a+\sigma\,]$, atunci, integrând de la a la t relaţia

$$x'(s) = f(s, x(s))$$

pentru orice $s \in [\, a, a+\sigma\,]$, şi ţinând cont de condiţia iniţială $x(a) = \xi$, obţinem că $x = x(t)$ satisface ecuaţia integrală (7) pe $[\, a, a+\sigma\,]$.

Reciproc, dacă ştim că $x = x(t)$ este o funcţie continuă care verifică (7) pentru orice t dintr-un interval $[\, a, a+\sigma\,]$, atunci deducem imediat că x este de clasă C^1 ca primitivă a unei funcţii continue şi verificăm imediat prin derivare că este o soluţie a ecuaţiei $x' = f(t, x)$. In plus, din (7) rezultă şi $x(a) = \xi$, deci $x = x(t)$ este soluţie a problemei Cauchy (1).

Pasul 2. Arătăm că şirul aproximaţiilor succesive dat de (5) este bine definit, mai precis că $(\tau, x_k(\tau)) \in \Delta = [\, a, a+h\,] \times B(\xi, r)$ pentru orice $\tau \in [\, a, a+\delta\,]$ şi orice $k \in \mathbb{N}$.

Din (4) rezultă imediat că $[\, a, a+\delta\,] \subset [\, a, a+h\,]$, mai avem de arătat că $x_k(\tau) \in B(\xi, r)$ pentru orice $\tau \in [\, a, a+\delta\,]$ şi orice $k \in \mathbb{N}$.

Procedăm prin inducţie. Pentru $k = 0$ avem, evident,

$$x_0(\tau) = \xi \in B(\xi, r),$$

pentru orice $\tau \in [\, a, a+\delta\,]$. Presupunem, pentru un $k \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar, că $x_k(\tau) \in B(\xi, r)$ pentru orice $\tau \in [\, a, a+\delta\,]$. În virtutea definiţiei lui x_{k+1} şi a relaţiilor (2) şi (4),

$$\|x_{k+1}(t) - \xi\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_k(\tau))\|\, d\tau \leq \delta M \leq r$$

pentru orice $t \in [\, a, a+\delta\,]$, deci $x_{k+1}(\tau) \in B(\xi, r)$ pentru orice $\tau \in [\, a, a+\delta\,]$. Am justificat astfel, prin inducţie, că şirul (x_k) dat de (5) este bine definit pe $[\, a, a+\delta\,]$ şi are valorile în $B(\xi, r)$.

Pasul 3. Arătăm că şirul (x_k) este *uniform convergent* pe $[\, a, a+\delta\,]$ la o funcţie $x : [\, a, a+\delta\,] \to \mathbb{R}^n$ definită, în consecinţă, de limita sa punctuală

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \quad \text{pentru orice } t \in [\, a, a+\delta\,]. \tag{8}$$

Folosim *principiul sumelor telescopice*: deoarece

$$x_n(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + \cdots + (x_n(t) - x_{n-1}(t))$$

rezultă că şirul (x_n) este uniform convergent pe $[\, a, a+\delta\,]$ dacă şi numai dacă seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} [x_{k+1}(t) - x_k(t)] \tag{9}$$

este uniform convergentă pe $[a, a+\delta]$. Pentru aceasta utilizăm Criteriul lui Weierstrass pentru convergenţa uniformă a seriilor de funcţii. Din (5) şi (2), avem

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_0(\tau))\| \, d\tau \leq M(t-a)$$

pentru orice $t \in [a, a+\delta]$. Din (3)urmează că

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))\| \, d\tau$$

$$\leq L \int_a^t \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau \leq L \int_a^t M(\tau - a) \, d\tau \leq M \frac{L(t-a)^2}{2!} \; ,$$

pentru orice $t \in [a, a+\delta]$.

Obţinem astfel, din aproape în aproape, că

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq M \frac{L^k (t-a)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{10}$$

pentru orice $t \in [a, a+\delta]$, şi orice $k \in \mathbb{N}$, de unde urmează că

$$\sup_{t \in [a, a+\delta]} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $t \in [a, a+\delta]$.

Deoarece seria numerică $\sum_{k=0}^{\infty} M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!}$ este convergentă, mai precis

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \left(e^{\delta L} - 1 \right),$$

urmează din Criteriul lui Weierstrass că seria (9) este uniform convergentă pe $[a, a+\delta]$ şi, o dată cu ea, şirul (x_n).

Pasul 4. Arătăm că limita şirului aproximaţiilor succesive este o soluţie a problemei Cauchy (1). Deoarece toţi termenii şirului (x_n) sunt funcţii continue cu valori în $B(\xi, r)$ iar acesta converge uniform, rezultă că limita sa $x = x(t)$ dată de relatia (8) este tot o funcţie continuă cu valori mulţimea închisă $B(\xi, r)$.

Deoarece $f = f(t, x)$ este lipschitziană în raport cu x, avem

$$\|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \leq L \|x_n(t) - x(t)\|$$

şi, deoarece (x_n) converge uniform pe $[a, a+\delta]$ la $x = x(t)$, urmează că

$$0 \leq \sup_{t \in [a, a+\delta]} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \leq L \sup_{t \in [a, a+\delta]} \|x_n(t) - x(t)\| \to 0$$

pentru $n \to \infty$, de unde rezultă că şirul de funcţii $(f(\cdot, x_n(\cdot)))$ converge uniform la $f(\cdot, x(\cdot))$ pe $[a, a+\delta]$.

Am arătat că se poate trece la limită sub integrală în relaţia de recurenţă (5). Obţinem că funcţia limită $x = x(t)$ este o soluţie continuă a ecuaţiei integrale Volterra (7) şi, prin urmare, conform Pasului 1, este o soluţie de clasă C^1 a problemei Cauchy (1).

Pasul 5. Demonstrăm unicitatea soluţiei. Fie $y = y(t)$ o soluţie oarecare a problemei Cauchy (1) pe definită pe un interval $[\,a, a+\sigma\,] \subset [\,a, a+\delta\,]$. Urmează că $y = y(t)$ verifică ecuaţia Volterra

$$y(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau, \tag{11}$$

de unde, scăzând membru cu membru relaţiile (5) şi (11) şi trecând la norme, obţinem

$$\|x_0(t) - y(t)\| \le \int_a^t \|f(\tau, y(\tau))\|\, d\tau \le M(t-a)$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\sigma\,]$, şi

$$\|x_{k+1}(t) - y(t)\| \le \int_a^t \|f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|\, d\tau$$

$$\le L \int_a^t \|x_k(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau,$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\sigma\,]$ şi orice $k \in \mathbb{N}$. De aici avem

$$\|x_1(t) - y(t)\| \le L \int_a^t \|x_0(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau \le L \int_a^t M(\tau - a)\, d\tau \le M \frac{L(t-a)^2}{2!} \ ,$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\sigma\,]$ şi, din aproape în aproape,

$$\|x_k(t) - y(t)\| \le M \frac{L^k (t-a)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{12}$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\sigma\,]$ şi orice $k \in \mathbb{N}$.

Trecând la limită după k în relaţia de mai sus, obţinem că

$$y(t) = \lim_{k \to \infty} x_k(t) = x(t),$$

pentru orice t din intervalul comun de existenţă. Am probat astfel unicitatea soluţiei $x = x(t)$.

Pasul 6. Formula de evaluare a erorii (6) este o consecinţă imediată a relaţiei (12) scrisă pentru soluţia $x = x(t)$ în locul lui $y = y(t)$.

Observaţie. La Pasul 4, convergenţa uniformă a şirului $(f(\cdot, x_n(\cdot))$ se poate justifica folosind numai continuitatea funcţiei f. Într-adevăr, deoarece f este continuă pe mulţimea compactă Δ rezultă că este chiar uniform continuă, iar de aici urmează imediat că şirul de funcţii $(f(\cdot, x_n(\cdot))$ este şir fundamental (şir Cauchy) în sensul convergenţei uniforme, deci este uniform convergent la limita sa punctuală $f(\cdot, x(\cdot))$.

De fapt, pentru trecerea la limită sub integrală în relaţia (5) este suficientă numai convergenţa punctuală a şirului $(f(\cdot, x_n(\cdot))$ deoarece, în acest caz, este aplicabil unul dintre rezultatele fundamentale a Teoriei măsurii, şi anume Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue.

Observaţie. Unicitatea se poate justifica şi fără estimarea (12). Într-adevăr, dacă $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt două soluţii ale problemei Cauchy (1) sau, echivalent, ale ecuaţiei integrale (7), avem

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau \leq L \int_a^t \|x(\tau) - y(\tau)\| \, d\tau$$

pentru orice $t \in [\, a, a + \delta \,]$. Notăm $u(t) = \|x(t) - y(t)\|$ şi avem

$$u(t) \leq 0 + \int_a^t Lu(\tau) \, d\tau,$$

pentru orice $t \in [\, a, a + \delta \,]$ şi, din Lema lui Gronwall, rezultă că

$$0 \leq \|x(t) - y(t)\| = u(t) \leq 0 \cdot e^{\int_a^t L \, d\tau} = 0,$$

pentru orice $t \in [\, a, a + \delta \,]$, ceea ce demonstrează unicitatea soluţiei.
Soluţii bilaterale. Fie $f : \Delta = [\, a - h, a + h \,] \times B(\xi, r) \to \mathbb{R}^n$ continuă pe Δ şi lipshitziană pe $B(\xi, r)$. În acest caz şi funcţia $g : [\, -a - h, -a + h \,] \times B(\xi, r) \to \mathbb{R}^n$, dată de $g(t, x) = -f(-t, x)$, este continuă şi lipshitziană pe $B(\xi, r)$, este aplicabilă deci teorema lui Picard pentru problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(-a) = \xi, \end{cases}$$

de unde urmează, ţinând cont de Principiul Soluţiei Retrograde, că problema Cauchy (1) admite o soluţie unică la stanga lui a. Aplicând şi Principiul de Concatenare, obţinem în final că problema Cauchy (1) admite pe $[\, a - \delta, a + \delta \,]$ o soluţie unică, dată tot de limita şirului aproximaţiilor sucesive (5), definit acum pe intervalul $[\, a - \delta, a + \delta \,]$, unde $\delta > 0$ este dat tot de relaţia (4).

Existenţa locală. Continuitatea funcţiei f asigură numai existenţa soluţiilor locale, nu şi unicitatea lor. Menţionăm, fără demonstraţie

Teorema 2. (**Peano**). *Fie I un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$. Dacă $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă atunci pentru orice $(a, \xi) \in I \times \Omega$, $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie locală.*

Faptul că numai continuitatea lui f nu asigură unicitatea este dovedit de următorul exemplu: Problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3\sqrt[3]{x^2} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite cel puţin următoarele două soluţii la dreapta, după cum se poate verifica direct:

$$x_1(t) = 0, \quad \text{pentru orice } t \geq 0,$$

funcţia nulă, şi

$$x_2(t) = t^3, \quad \text{pentru orice } t \geq 0.$$

De fapt problema Cauchy de mai sus are o infinitate de soluţii: toate funcţiile de forma

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 \le t \le a \\ (t-a)^3 & \text{pentru } a < t < +\infty \end{cases}$$

sunt soluţii la dreapta, pentru orice $a > 0$.