Cursul 6

(plan de curs)

Existenţă şi unicitate globală (continuare)

§3. Dependenţa continuă de data iniţială

Fie $f : [\,a,\,b\,] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $[\,a,\,b\,] \times \mathbb{R}^n$. Pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, vom considera problema Cauchy

$$\mathcal{PC}(a,\xi) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

Presupunem că f este global lipschitziană pe $\mathbb{R}^n$, adică există $L > 0$ astfel încât

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\| \tag{1}$$

pentru orice $t \in [\,a,\,b\,]$ şi orice x şi $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Atunci, conform rezultatelor de existenţă şi unicitate globală, problema $\mathcal{PC}(a,\xi)$ are o soluţie saturată unică.

Lema 4. *Pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, soluţia saturată a problemei $\mathcal{PC}(a,\xi)$ este globală.*

Demonstraţie. Din (1) rezultă

$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leq L\|x\| + \|f(t,0)\| \leq M + L\|x\|$$

pentru orice $(t,x) \in [\,a,\,b\,] \times \mathbb{R}^n$, unde

$$M = \sup_{t \in [\,a,\,b\,]} \|f(t,0)\| < +\infty.$$

Fie $x = x(t)$ soluţia saturată a problemei $\mathcal{PC}(a,\xi)$, definită pe un interval de forma $[\,a,\,b'\,)$ sau $[\,a,\,b'\,]$, cu $b' \leq b$. Din

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

urmează

$$\|x(t)\| \leq \|\xi\| + M(b-a) + \int_a^t L\|x(\tau)\|\,d\tau$$

şi din Lema lui Gronwall obţinem

$$\|x(t)\| \leq (\|\xi\| + M(b-a))e^{L(b-a)}$$

pentru orice $t \in [\,a,\,b')$. Am arătat că soluţia saturată $x = x(t)$ este mărginită şi, dacă presupunem că $b' < b$ din Consecinţa 1 rezultă că este continuabilă, deci $b' = b$.

Să observăm că orice soluţie $x = x(t)$ definită pe $[\,a,\,b\,)$ poate fi prelungită prin continuitate în $t = b$. Într-adevăr, ştim că este mărginită, rezultă că există $M_1 > 0$ astfel încât $\|f(t,x(t))\| \leq M_1$ pentru orice $t \in [\,a,\,b\,)$ şi, din Lema 3 rezultă că există

$$\lim_{t \nearrow b} x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(b).$$

Am arătat că orice soluţie saturată a $\mathcal{PC}(a, \xi)$ este definită pe întreg intervalul $[\,a,\, b\,]$.

În continuare, vom considera spaţiul liniar $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$ al funcţiilor continue $x : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ dotat cu norma supremum

$$\|x\|_{C_{[\,a,b\,]}} = \sup_{t\in[\,a,b\,]} \|x(t)\|,$$

şi amintim că această normă induce convergenţa uniformă pe $[\,a, b\,]$ a şirurilor de funcţii.

Notăm cu $x(\cdot, \xi) : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ soluţia saturată a problemei $\mathcal{PC}(a, \xi)$.

Teorema 5. *În ipotezele precizate, aplicaţia* $\xi \mapsto x(\cdot, \xi)$ *este lipschitziană de la* $\mathbb{R}^n$ *în* $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$.

Demonstraţie. Fie $\xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Avem

$$\|x(t, \xi) - x(t, \tilde{\xi})\| \le \|\xi - \tilde{\xi}\| + \int_a^t \|f(s, x(s, \xi)) - f(s, x(s, \tilde{\xi}))\|\, ds$$

$$\le \|\xi - \tilde{\xi}\| + L \int_a^t \|x(s, \xi) - x(s, \tilde{\xi})\|\, ds.$$

Din Lema lui Gronwall, rezultă

$$\|x(t, \xi) - x(t, \tilde{\xi})\| \le \|\xi - \tilde{\xi}\| e^{L(b-a)}$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. În consecinţă

$$\|x(\cdot, \xi) - x(\cdot, \tilde{\xi})\|_{C_{[\,a,b\,]}} = \sup_{t\in[\,a,b\,]} \|x(t, \xi) - x(t, \tilde{\xi})\| \le e^{L(b-a)}\|\xi - \tilde{\xi}\|,$$

şi, prin urmare, $\xi \mapsto x(\cdot, \xi)$ este lipschitziană de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$ cu constanta Lipschitz

$$K = e^{L(b-a)}.$$

Observaţie. Cum orice funcţie lipshitziană este continuă, rezultă că aplicaţia $\xi \mapsto x(\cdot, \xi)$ este continuă de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$. Aceasta înseamnă că, dacă $\xi_n \to \xi$, atunci şirul de soluţii $x(\cdot, \xi_n)$ converge uniform pe $[\,a, b\,]$ la soluţia $x(\cdot, \xi)$.

Consecinţă. *În ipotezele precizate, aplicaţia* $(t, \xi) \mapsto x(t, \xi)$ *este continuă de la* $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$ *în* $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie (t^*, ξ^*) un punct fixat arbitrar în $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$, şi fie (t_n, ξ_n) un şir convergent la (t^*, ξ^*) în $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$. Cu notaţiile de mai sus, avem

$$\|x(t_n, \xi_n) - x(t^*, \xi^*)\| \le \|x(t_n, \xi_n) - x(t_n, \xi^*)\| + \|x(t_n, \xi^*) - x(t^*, \xi^*)\|$$

$$\le \|x(\cdot, \xi_n) - x(\cdot, \xi^*)\|_{C_{[\,a,b\,]}} + \|x(t_n, \xi^*) - x(t^*, \xi^*)\|$$

$$\le K\|\xi_n - \xi^*\| + \|x(t_n, \xi^*) - x(t^*, \xi^*)\| \to 0 \ \text{ pentru } n \to \infty,$$

deoarece $\xi_n \to \xi^*$ şi $t_n \to t^*$, iar funcţia $t \mapsto x(t, \xi^*)$ este continuă pe $[\,a, b\,]$.

§4. Dependenţa continuă de parametri

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ şi $p \in \mathbb{R}^m$, notăm cu

$$(x, p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_m).$$

Fie $f : [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ o funcţie care este continuă pe $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ şi lipschitziană pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, adică există $L > 0$ astfel încât, pentru orice $(t, x, p), (t, \tilde{x}, \tilde{p}) \in [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, să avem

$$\|f(t, x, p) - f(t, \tilde{x}, \tilde{p})\|_n \leq L\|(x, p) - (\tilde{x}, \tilde{p})\|_{n+m},$$

unde, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|_k$ este norma pe $\mathbb{R}^k$.

Pentru $\xi \in \mathbb{R}^n$ şi $p \in \mathbb{R}^m$ fixaţi arbitrar, considerăm problema Cauchy

$$\mathcal{PC}(a, \xi)_p \qquad \begin{cases} x' = f(t, x, p) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

care, după cum este uşor de văzut, are o soluţie globală unică $x(\cdot, \xi, p) : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 6. *Pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixat, aplicaţia $q \mapsto x(\cdot, \xi, q)$ este lipschitziană de la $\mathbb{R}^m$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$, acesta din urmă fiind înzestrat cu norma supremum.*

Demonstraţie. În sistemul iniţial $x' = f(t, x, p)$ considerăm că parametrul p este o funcţie de t cu valoare constantă, deci cu derivata nulă, şi completăm sistemul în mod corespunzător. Obţinem următoarea problemă Cauchy fără parametri, echivalentă cu cea iniţială când parametrul p are fixată o valoare oarecare $q \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{PC}(a, \xi, q) \qquad \begin{cases} \begin{cases} x' = f(t, x, p) \\ p' = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x(a) = \xi \\ p(a) = q \end{cases} \end{cases}$$

Pentru $x \in \mathbb{R}^n$ şi $p \in \mathbb{R}^m$ notăm

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+m}) = (x, p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

şi definim $F : [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ prin

$$F(t, z) = (f_1(t, z), f_2(t, z), \ldots, f_n(t, z), 0, 0, \ldots, 0) = (f(t, z), 0).$$

Atunci, $\mathcal{PC}(a, \xi, q)$ poate fi rescrisă ca

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(a) = (\xi, q). \end{cases}$$

Arătăm că dependenţa continuă a soluţiei x de q este o consecinţă a dependenţei continue a lui z de (ξ, q).

Să observăm pentru început că suntem în ipotezele Teoremei 5. Pentru simplificarea expunerii, în $\mathbb{R}^k$ vom folosi norma

$$\|x\|_k = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|,$$

deoarece în această normă avem

$$\|z\|_{n+m} = \|(x,p)\|_{n+m} = \|x\|_n + \|p\|_m.$$

Pentru orice $z = (\xi, q), \tilde{z} = (\tilde{\xi}, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ avem

$$\|F(t,z) - F(t,\tilde{z})\|_{n+m} = \|((f(t,z),0) - ((f(t,\tilde{z}),0)\|_{n+m} =$$
$$\|f(t,z) - f(t,\tilde{z})\|_n \leq L\|z - \tilde{z}\|_{n+m}$$

şi, prin urmare, sunt îndeplinite ipotezele teoremei. Rezultă că aplicaţia

$$(\xi, q) \in \mathbb{R}^{n+m} \mapsto z(\cdot, \xi, q) \in C([\,a,b\,]; \mathbb{R}^{n+m}),$$

este lipschitziană cu constanta Lipschitz $K = e^{L(b-a)} > 1$, adică

$$\|z(\cdot,\xi,q) - z(\cdot,\tilde{\xi},\tilde{q})\|_{C_{[\,a,b\,]}} \leq K\|(\xi,q) - (\tilde{\xi},\tilde{q})\|_{n+m}.$$

Fixăm $\tilde{\xi} = \xi$ şi, ţinând cont că $z(\cdot,\xi,q) = (x(\cdot,\xi,q),q)$, obţinem

$$\|(x(\cdot,\xi,q),q) - (x(\cdot,\xi,\tilde{q}),\tilde{q})\|_{C_{[\,a,b\,]}} \leq K\|(\xi,q) - (\xi,\tilde{q})\|_{n+m},$$

de unde urmează că

$$\|x(\cdot,\xi,q) - x(\cdot,\xi,\tilde{q})\|_{C_{[\,a,b\,]}} + \|q - \tilde{q}\|_m \leq K\|q - \tilde{q})\|_m$$

şi, prin urmare,

$$\|x(\cdot,\xi,q) - x(\cdot,\xi,\tilde{q})\|_{C_{[\,a,b\,]}} \leq (K-1)\|q - \tilde{q}\|_m,$$

ceea ce trebuia arătat.

§5. Existenţă şi unicitate globală pentru ecuaţii de ordin n

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordin n

$$(ED_n) \qquad y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

cu $g : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $I \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω. Am văzut că prin intermediul transformării

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

aceasta devine echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

şi astfel toate noţiunile şi rezultatele de existenţă şi unicitate globală prezentate pentru sisteme diferenţiale de ordinul întâi pot fi transferate la ecuaţii de ordin superior.

De exemplu, următoarea lemă de la sisteme

Lema 2. *O soluţie* $x : [\,a, b) \to \Omega$ *a* $\mathcal{PC}(I, \Omega, f, a, \xi)$ *este continuabilă dacă şi numai dacă*

(i) $b < \sup I$

şi

(ii) $\exists \lim\limits_{t \nearrow b} x(t) = x^* \in \Omega.$

devine în cazul ecuaţiilor de ordin n

Lema 6. *O soluţie* $y : [\,a, b) \to \mathbb{R}$ *a ecuaţiei* (ED_n) *este continuabilă dacă şi numai dacă*

(i) $b < \sup I$

şi

(ii) $\exists \lim\limits_{t \nearrow b} (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega.$

Atragem atenţia că în cazul ecuaţiilor de ordin n, deoarece distanţa dintre datele iniţiale ale soluţiilor $y = y(t)$ şi $y = \tilde{y}(t)$, definite pe $[\,a, b\,]$, este

$$\|(y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)) - (\tilde{y}(a), \tilde{y}'(a), \ldots, \tilde{y}^{(n-1)}(a))\|,$$

distanţa dintre soluţiile corespunzătoare este considerată a fi

$$\sup_{t \in [\,a,b\,]} \|(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) - (\tilde{y}(t), \tilde{y}'(t), \ldots, \tilde{y}^{(n-1)}(t))\|$$

şi nu doar $\sup_{t \in [\,a,b\,]} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|$. Altfel spus, pentru soluţiile ecuaţiei (ED_n) se foloseşte norma spaţiului $C^n([\,a, b\,], \mathbb{R})$,

$$\|y\| = \sup_{t \in [\,a,b\,]} \|(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\|,$$

şi nu norma lui $C([\,a, b\,], \mathbb{R})$.

Sisteme diferenţiale liniare (I)

§1. Sisteme diferenţiale liniare. Existenţa şi unicitatea globală

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ şi $b_i : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Vom studia sistemul

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

pe care îl vom scrie sub forma matriceală

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{2}$$

unde

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Aici $A : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $b : I \to \mathbb{R}^n$ sunt funcţii continue.

Definiţia 1. Dacă $b(t) \equiv 0$ pe I sistemul (2) poartă numele de *omogen*, iar în caz contrar *neomogen*.

În $\mathbb{R}^n$ utilizăm norma

$$\|x\| = \max_i\{|x_i|\},$$

iar pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, definim

$$\|A\| = \max_i\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$$

pentru orice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Lema 1. *Funcţia* $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *este o normă pe* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, *adică*

(N_1) $\|A\| = 0$ *dacă şi numai dacă* A *este matricea nulă*;

(N_2) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$ *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi orice* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

(N_3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

În plus, $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *este o* normă matriceală, *adică:*

(N_4) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$ *şi orice* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

(N_5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. (N_1), (N_2) şi (N_3) sunt evidente. Demonstrăm (N_4). Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\|Ax\| = \max_i |(Ax)_i| = \max_i |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$$

şi utilizând inegalitatea

$$|x_j| \leq \max_i |x_i| = \|x\|$$

valabilă pentru orice $j = 1, \ldots, n$, obţinem mai departe

$$\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leq \|x\| \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|\|A\|$$

şi deci $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Demonstrăm (N_5). Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ avem

$$\|AB\| = \max_i \sum_{j=1}^n \big|(AB)_{ij}\big| = \max_i \sum_{j=1}^n \big|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\big| \leq$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| = \max_i \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| =$$

$$= \max_i \sum_{k=1}^n \left(|a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right) \leq \|B\| \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = \|B\|\|A\|.$$

Teorema 1. (de existenţă şi unicitate globală) *Pentru orice $a \in I$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ problema Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

are o soluţie globală unică.

Demonstraţie. Avem $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuă, dată de

$$f(t,x) = A(t)x + b(t)$$

cu

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x) = a_{ij}(t)$$

funcţii continue, rezultă că f este local lipschitziană în raport cu x şi, prin urmare, este asigurată existenţa şi unicitatea soluţiilor problemei Cauchy ataşate.

Fie $[\,a,b\,] \subset I$. Avem $f : [\,a,b\,] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ global lipschitziană în raport cu x:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\|\|(x-y)\| \leq L\|x-y\|$$

unde

$$L = \sup_{t\in[\,a,b\,]} \|A(t)\| < +\infty.$$

Din Lema 4 rezultă că orice soluţie saturată este definită pe întreg intervalul $[a, b]$. Cum $[a, b] \subset I$ a fost fixat arbitrar, rezultă că soluţiile saturate sunt definite pe întreg intervalul I, adică sunt globale.

§2. Sisteme omogene. Spaţiul soluţiilor

Considerăm sistemul liniar omogen

$$x' = A(t)x \tag{S.L.O}$$

şi notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor sale saturate

$$\mathcal{S} = \{x : I \to \mathbb{R}^n \text{ soluţie pentru(S.L.O)}\} \subset C^1(I; \mathbb{R}^n).$$

Teorema 2. *Mulţimea $\mathcal{S}$ este subspaţiu liniar în $C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Mai mult,*

$$\dim(\mathcal{S}) = n$$

şi, pentru orice $a \in I$, aplicaţia $\Gamma_a : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ dată de

$$\Gamma_a(x) = x(a),$$

pentru orice $x \in \mathcal{S}$, este un izomorfism de spaţii liniare.

Demonstraţie. Pentru $x, y \in \mathcal{S}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ notăm $z = \alpha x + \beta y$ şi avem

$$z'(t) = (\alpha x(t) + \beta y(t))' = \alpha x'(t) + \beta y'(t) = \alpha A(t)x(t) + \beta A(t)y(t) =$$

$$= A(t)[\alpha x(t) + \beta y(t)] = A(t)z(t)$$

pentru orice $t \in I$, deci $z = \alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$. Am arătat astfel că $\mathcal{S}$ este subspaţiu liniar în $C^1(I; \mathbb{R}^n)$

Arătăm acum că $\Gamma_a : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ este un izomorfism de spaţii liniare. Pentru $z = \alpha x + \beta y$, cu $x, y \in \mathcal{S}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem

$$\Gamma_a(z) = z(a) = \alpha x(a) + \beta y(a) = \alpha \Gamma_a(x) + \beta \Gamma_a(y),$$

de unde urmează că Γ_a este un operator liniar.

Din Teorema 1 rezultă că, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, ecuaţia

$$\Gamma_a(x) = \xi,$$

care este doar o reformulare a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(a) = \xi, \end{cases}$$

are soluţie unică $x \in \mathcal{S}$. Prin urmare, Γ_a este un operator liniar bijectiv, deci un izomorfism de spaţii liniare între $\mathcal{S}$ şi $\mathbb{R}^n$. Urmează că $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Observaţia 1. Dacă $x^1, x^2, \dots x^n \in \mathcal{S}$ este o bază, orice element $x \in \mathcal{S}$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei,

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \tag{3}$$

pentru orice $t \in I$.

Pentru orice sistem de n soluţii

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ \vdots \\ x_n^1(t) \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_n^2(t) \end{pmatrix}, \ldots, x^n(t) = \begin{pmatrix} x_1^n(t) \\ x_2^n(t) \\ \vdots \\ x_n^n(t) \end{pmatrix},$$

soluţii, definim pe coloane matricea $X(t) = [\, x^1(t)\ x^2(t)\ \ldots\ x^n(t)\,]$, adică

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

pentru orice $t \in I$.

Definiţia 2. Matricea X se numeşte *matrice asociată* sistemului de soluţii x^1, x^2, $\ldots$, x^n.

Observaţia 2. Se verifică uşor că

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

pentru orice $t \in I$. Într-adevăr, judecând pe coloane, avem

$$X'(t) = [\, x^{1\prime}(t)\, x^{2\prime}(t)\ \ldots\ x^{n\prime}(t)\,] = [\, A(t)x^1(t)\ A(t)x^2(t)\ \ldots\ A(t)x^n(t)\,] = A(t)X(t)$$

Definiţia 3. Sistemul $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$ poartă numele de *sistem fundamental de soluţii* dacă el constituie o bază în $\mathcal{S}$.

Definiţia 4. Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii poartă numele de *matrice fundamentală* a sistemului (S.L.O).

Observaţia 3. Dacă X este o matrice fundamentală pentru sistemul (S.L.O), atunci soluţia generală a (S.L.O) este dată de

$$x_{\text{S.G.O.}}(t) = X(t)c \tag{5}$$

pentru $t \in I$ şi $c \in \mathbb{R}^n$. Într-adevăr, (5) este doar scrierea matriceală a relaţiei (3)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ x_2^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_1^i(t)c_i \\ \sum_{i=1}^n x_2^i(t)c_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_n^i(t)c_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = X(t)c.$$

Definiţia 5. Dacă X este matricea asociată unui sistem de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n$ din $\mathcal{S}$, determinantul său

$$W(t) = \det X(t),\ t \in I,$$

se numeşte *wronskianul* asociat acestui sistem de soluţii.

Teorema 3. *Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n$ un sistem de n soluţii ale* (S.L.O), *fie X matricea asociată acestui sistem de soluţii şi W wronskianul ataşat. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *matricea X este fundamentală*;

(ii) *$W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$* ;

(iii) *există $a \in I$ astfel încât $W(a) \neq 0$.*

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem că X este matrice fundamentală, adică presupunem că sistemul de soluţii $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ formează o bază în $\mathcal{S}$, şi fixăm arbitrar un $t \in I$. Din Teorema 2 ştim că operatorul $\Gamma_t : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ dat de

$$\Gamma_t(x) = x(t),\ x \in \mathcal{S},$$

este un izomorfism de spaţii liniare, prin urmare sistemul de vectori

$$\{\Gamma_t(x^1), \Gamma_t(x^2), \ldots, \Gamma_t(x^n)\} = \{x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\}$$

formează o bază în $\mathbb{R}^n$, de unde rezultă că

$$W(t) = \det X(t) = \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Evident.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Fie $a \in I$ astfel încât $W(a) \neq 0$, adică

$$W(a) = \det X(a) = \det \begin{pmatrix} x_1^1(a) & x_1^2(a) & \ldots & x_1^n(a) \\ x_2^1(a) & x_2^2(a) & \ldots & x_2^n(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^1(a) & x_n^2(a) & \ldots & x_n^n(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Deducem de aici că sistemul de n vectori $\{x^1(a), x^2(a), \ldots, x^n(a)\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^n$ şi, observând că

$$\{x^1(a), x^2(a), \ldots, x^n(a)\} = \{\Gamma_a(x^1), \Gamma_a(x^2), \ldots, \Gamma_a(x^n))\},$$

urmează că sistemul $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ este o bază în $\mathcal{S}$ deoarece Γ_a este un izomorfism de spaţii liniare. Deci $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ este un sistem fundamental de soluţii, iar X o matrice fundamentală.

Exemplu. Se verifică imediat că sistemul

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

admite soluţiile

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} \text{ şi } x^2(t) = \begin{pmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Matricea asociată acestui sistem de soluţii este

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

iar wronskianul

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0,$$

pentru orice t, deci $X(t)$ este o matrice fundamentală.

Teorema 4. *Dacă X este o matrice fundamentală pentru* (S.L.O) *atunci orice altă matrice fundamentală Y este de forma*

$$Y(t) = X(t)C,$$

cu $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară.

Demonstraţie. Fie $y^1, y^2, \ldots, y^n \in \mathcal{S}$ un sistem fundamental de soluţii pentru (S.L.O) şi fie $Y(t) = [\, y^1 \; y^2 \; \ldots \; y^n \,]$ matricea cu coloanele $y^1, y^2, \ldots, y^n$, adică matricea asociată acestor soluţii.

Deoarece X este matrice fundamentală, rezultă că există vectorii coloană $c^1, c^2 \ldots, c^n \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$y^1 = X(t)c^1, \; y^2 = X(t)c^2, \; \ldots, y^n = X(t)c^n,$$

relaţii care pot fi scrise sub forma

$$[\, y^1 \; y^2 \; \ldots \; y^n \,] = [\, X(t)c^1 \; X(t)c^2 \; \ldots \; X(t)c^n \,] = X(t)[\, c^1 \; c^2 \; \ldots \; c^n \,]$$

adică

$$Y(t) = X(t)C,$$

unde am notat cu $C = [\, c^1 \; c^2 \; \ldots \; c^n \,]$ matricea formată din vectorii coloană $c^1, c^2 \ldots, c^n$.

Din

$$\det Y(t) = \det(X(t)C) = \det X(t) \det C \neq 0,$$

urmează că $\det C \neq 0$ şi deci C este nesingulară.

Reciproc, dacă presupunem că $Y = [\, y^1 \; y^2 \; \ldots \; y^n \,]$ are forma

$$Y(t) = X(t)C,$$

cu $C = [\, c^1 \; c^2 \; \ldots \; c^n \,]$ nesingulară, atunci $\det Y(t) = \det X(t) \det C \neq 0$ iar coloanele sale sunt de forma $y^i = X(t)c^i$, deci sunt soluţii pentru (S.L.O). Urmează că Y este matrice fundamentală.

Observaţia 4. Fie $a \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ şi X o matrice fundamentală pentru (S.L.O). Atunci, unica soluţie a problemei Cauchy pentru sistemul omogen

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

este dată de

$$x(t) = X(t)X^{-1}(a)\xi \tag{6}$$

pentru orice $t \in I$. Într-adevăr, ştim că soluţia are forma

$$x(t) = X(t)c$$

pentru orice $t \in I$, unde c este un vector constant din $\mathbb{R}^n$. Impunând condiţia $x(a) = \xi$, deducem $X(a)c = \xi$. Dar, conform Teoremei 3, $X(a)$ este inversabilă şi, în consecinţă, $c = X^{-1}(a)\xi$, ceea ce demonstrează (6).

Lema 2. *Fie $d_{ij} : I \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe I, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Atunci funcţia $D : I \to \mathbb{R}$ definită prin:*

$$D(t) = \begin{vmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) \dots & d_{1n}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) \dots & d_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ d_{n1}(t) & d_{n2}(t) \dots & d_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

pentru orice $t \in I$ este derivabilă pe I şi

$$D'(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(t)$$

pentru orice $t \in I$, unde D_k este determinantul obţinut din D prin înlocuirea elementelor liniei k cu derivatele acestora, $k = 1, 2, \dots, n$.

Demonstraţie. Aplicăm definiţia determinantului

$$D(t) = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sign}(\sigma) d_{1\sigma(1)}(t) d_{2\sigma(2)}(t) \cdots d_{n\sigma(n)}(t)$$

şi avem

$$D'(t) = \sum_{\sigma \in S(n)} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}(\sigma) d_{1\sigma(1)}(t) d_{2\sigma(2)}(t) \cdots d'_{k\sigma(k)}(t) \cdots d_{n\sigma(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(t).$$

Teorema 5. (Liouville) *Dacă W este wronskianul unui sistem de n soluţii ale sistemului* (S.L.O), *atunci*

$$W(t) = W(a) \exp\left(\int_a^t \operatorname{tr} A(s)\, ds\right) \tag{7}$$

pentru orice $t \in I$, unde $a \in I$ este fixat, iar $\operatorname{tr} A$ este urma matricii A, adică

$$\operatorname{tr} A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$$

pentru orice $s \in I$.

Demonstraţie. Din Lema 2 rezultă că W este derivabilă pe I şi în plus

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(t)$$

unde

$$W_k(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_k^1)'(t) & (x_k^2)'(t) & \dots & (x_k^n)'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Ţinând cont că $x^1, x^2, \dots, x^n$ sunt soluţii ale sistemului (S.L.O), obţinem

$$W_k(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)x_j^1(t) & \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)x_j^2(t) & \dots & \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_j^1(t) & x_j^2(t) & \dots & x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} = a_{kk}(t) \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^1(t) & x_k^2(t) & \dots & x_k^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Am arătat că

$$W_k(t) = a_{kk}(t)W(t)$$

de unde urmează că

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t)W(t)$$

pentru orice $t \in I$. Dar ecuaţia de mai sus este liniară şi omogenă şi ca atare W este dat de (7).