Cursul 7

(*plan de curs*)

Sisteme diferenţiale liniare (II)

§3. Sisteme neomogene. Formula variaţiei constantelor

Considerăm sistemul diferenţial liniar neomogen

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{S.L.N}$$

unde $A : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $b : I \to \mathbb{R}^n$ sunt funcţii continue. Considerăm şi sistemul omogen ataşat

$$x' = A(t)x. \tag{S.L.O}$$

Teorema 1. *Fie X o matrice fundamentală pentru* (S.L.O) *şi fie $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}^n$ o soluţie oarecare a sistemului* (S.L.N). *Funcţia $x : I \to \mathbb{R}^n$ este o soluţie a sistemului* (S.L.N) *dacă şi numai dacă are forma*

$$x(t) = X(t)c + \tilde{x}(t) \tag{1}$$

pentru orice $t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. *Etapa I, forma soluţiei.* Fie $x : I \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a (S.L.N) şi fie $z : I \to \mathbb{R}^n$ dată de

$$z(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

pentru orice $t \in I$. Avem

$$z'(t) = x'(t) - \tilde{x}'(t) = A(t)x(t) + b(t) - A(t)\tilde{x}(t) - b(t) = A(t)(x(t) - \tilde{x}(t)) = A(t)z(t)$$

pentru orice $t \in I$. Deci z este soluţie a sistemului omogen (S.L.O) şi, prin urmare, este de forma

$$z(t) = X(t)c$$

pentru orice $t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$. Urmează că

$$x(t) = z(t) + \tilde{x}(t) = X(t)c + \tilde{x}(t),$$

pentru orice $t \in I$, adică relaţia (1).

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie x funcţia definită de (1). Avem

$$x'(t) = X'(t)c + \tilde{x}'(t) = A(t)X(t)c + A(t)\tilde{x}(t) + b(t) =$$

$$= A(t)(X(t)c + \tilde{x}(t)) + b(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

pentru orice $t \in I$ şi în consecinţă x este soluţie a sistemului (S.L.N).

Observaţia 1. Teorema afirmă că soluţia generală a sistemului neomogen (S.L.N) este suma dintre soluţia generală a sistemului omogen asociat

$$x_{\text{S.G.O}}(t) = X(t)c$$

şi o soluţie particulară a sistemului (S.L.N), $x = \tilde{x}_{\text{S.P.N}}(t)$, adică

$$x_{\text{S.G.N}} = x_{\text{S.G.O}} + \tilde{x}_{\text{S.P.N}},$$

relaţie care este valabilă în general pentru toate problemele liniare, deoarece diferenţa a două soluţii a problemei neomogene este întotdeauna o soluţie a problemei omogene asociate.

Teorema 2. (formula variaţiei constantelor) *Fie X o matrice fundamentală a sistemului omogen* (S.L.O)*. Soluţia problemei Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

este dată de formula

$$x(t) = X(t)\left(X^{-1}(a)\xi + \int_a^t X^{-1}(s)b(s)\,ds\right) \tag{2}$$

pentru orice $t \in I$.

Demonstraţie. Inspiraţi de forma soluţiei generale în cazul omogen

$$x_{\text{S.G.O}}(t) = X(t)c,$$

căutăm o soluţie particulară a sistemului neomogen (S.L.N) sub forma

$$\tilde{x}(t) = X(t)c(t),$$

pe care am obţinut-o înlocuind vectorul de constante

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

cu un vector de funcţii

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

presupuse de clasă C^1.

Derivăm şi, ţinând cont că $X'(t) = A(t)X(t)$, obţinem

$$\tilde{x}'(t) = [X(t)c(t)]' = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) =$$

$$= A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)\tilde{x}(t) + X(t)c'(t).$$

Urmează că, dacă
$$X(t)c'(t) = b(t)$$
atunci $\tilde{x}$ este soluţie a sistemului neomogen (S.L.N). Cum $X(t)$ este inversabilă pentru orice t, vom cere ca
$$c'(t) = X^{-1}(t)b(t),$$
şi alegem chiar
$$c(t) = \int_a^t X^{-1}(s)b(s)\,ds.$$

Am găsit astfel următoarea soluţie particulară pentru (S.L.N):
$$\tilde{x} = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad \forall t \in I.$$

Aplicăm (1), rezultă că soluţia generală a (S.L.N) poate fi pusă sub forma
$$x(t) = X(t)c + X(t)\int_a^t X^{-1}(s)b(s)\,ds,$$
adică
$$x_{\text{S.G.N}}(t) = X(t)\left(c + \int_a^t X^{-1}(s)b(s)\,ds\right),$$
pentru orice $t \in I$. Aici c este iarăşi un vector de constante arbitrare.

Formula (2) se obţine din relaţia de mai sus determinând vectorul constant c din condiţia iniţială
$$x(a) = \xi \;\Leftrightarrow\; X(a)c = \xi \;\Leftrightarrow\; c = X^{-1}(a)\xi.$$

Exemplul 1. Considerăm sistemul neomogen
$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + t \\ x_2' = x_1 + t^2, \end{cases}$$
care se scrie matriceal sub forma
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că sistemul omogen corespunzător
$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1, \end{cases}$$
admite soluţiile
$$\begin{cases} x_1^1 = \cos t \\ x_2^1 = \sin t, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_1^2 = -\sin t \\ x_2^2 = \cos t, \end{cases}$$
care au matricea ataşată
$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

cu wronskianul nenul

$$W(t) = \det X(t) = 1,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Urmează că $X = X(t)$ este o matrice fundamentală pentru sistemul omogen.

Prin calcul direct se obţine

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

şi atunci formula variaţiei constantelor ne dă soluţia generală a sistemului neomogen sub forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \end{pmatrix} ds \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + \int_0^t (s \cos s + s^2 \sin s)\, ds \\ c_2 + \int_0^t (-s \sin s + s^2 \cos s)\, ds \end{pmatrix}.$$

Observaţia 2. Formula variaţiei constantelor (2) poate fi scrisă şi sub forma

$$x(t) = X(t) X^{-1}(a) \xi + \int_a^t X(t) X^{-1}(s) b(s)\, ds,$$

deoarece matricea $X(t)$ comută cu integrala. Mai mult, dacă notăm

$$U(t,s) = X(t) X^{-1}(s),$$

atunci formula capătă forma

$$x(t) = U(t,a)\xi + \int_a^t U(t,s) b(s)\, ds,$$

pentru orice $t \in I$. Din acest motiv, matricea U este numită *matricea rezolventă* a sistemului (S.L.N) sau *evolutorul* sistemului.

Să observăm că matricea rezolventă nu depinde de matricea fundamentală X. Într-adevăr, dacă Y este o altă matrice fundamentală, atunci există matricea nesingulară C astfel încât

$$Y(t) = X(t)C$$

şi avem

$$Y(t)Y^{-1}(s) = X(t)C(X(s)C)^{-1} = X(t)CC^{-1}X^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s) = U(t,s),$$

pentru orice $t, s \in I$.

Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

§1. Funcţia exponenţială de matrice

Considerăm sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$x'(t) = Ax(t), \tag{S.L.O}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Notăm cu $S_A(t) = X(t)$ matricea fundamentală care satisface condiţia iniţială $X(0) = I$, altfel spus, $S_A(t)$ este unica soluţie a problemei Cauchy matriceale

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = I. \end{cases} \tag{1}$$

Propoziţia 1. Familia de matrice $\{S_A(t), t \in \mathbb{R}\}$ are următoarele proprietăţi:

(i) $S_A(t+s) = S_A(t)S_A(s) = S_A(s)S_A(t)$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$;

(ii) $S_A(0) = I$;

(iii) $\lim_{t\to 0} S_A(t)\xi = \xi$ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. (i). Fie $s \in \mathbb{R}$ şi $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixaţi arbitrar. Notăm $\varphi(t) = S_A(t+s)\xi$ şi avem

$$\varphi'(t) = S_A^{'}(t+s)\xi = AS_A(t+s)\xi = A\varphi(t)$$

şi $\varphi(0) = S_A(s)\xi$.

Notăm $\psi(t) = S_A(t)S_A(s)\xi$ şi avem

$$\psi'(t) = S_A^{'}(t)S_A(s)\xi = AS_A(t)S_A(s)\xi = A\psi(t)$$

şi $\psi(0) = S_A(0)S_A(s)\xi = S_A(s)\xi$.

Am arătat că φ şi ψ sunt două soluţii ale (S.L.O) care satisfac aceeaşi condiţie iniţială, rezultă că ele coincid. Deci

$$S_A(t+s)\xi = S_A(t)S_A(s)\xi$$

pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, de unde urmează că are loc prima egalitate din (i). A doua egelitate rezultă din prima:

$$S_A(t)S_A(s) = S_A(t+s) = S_A(s+t) = S_A(s)S_A(t),$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$.

Proprietăţile (ii) şi (iii) sunt evidente.

Observaţie. Dacă identificăm orice matrice $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cu operatorul liniar $\tilde{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definit de produsul cu matricea S:

$$\tilde{S}(x) = Sx,$$

atunci Propoziţia 1 spune că familia $\{S_A(t), t \in \mathbb{R}\}$ este *un grup continuu de de operatori liniari.* Mai mult, deoarece are loc egalitatea

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(S_A(t)\xi - \xi) = S_A^{'}(0)\xi = AS_A(0)\xi = A\xi$$

pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, se spune că A este *generatorul infinitezimal* al grupului $S_A(t)$.

În continuare ne propunem să determinăm matricea $S_A(t)$ căutând-o sub forma unei serii matriceale de puteri

$$S_A(t) = A_0 + tA_1 + t^2 A_2 + t^3 A_3 + \cdots . \tag{2}$$

Pentru a da un sens egalităţii de mai sus, dotăm

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A = (a^{ij}) \text{ cu } a^{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \ldots, n\}$$

cu metrica indusă de norma

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a^{ij}|$$

adică

$$\mathrm{dist}(A, B) = \|A - B\|,$$

pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Este uşor de văzut că avem următoarea caracterizare a şirurilor convergente de matrice:

$$\lim_k A_k = A \Leftrightarrow \lim_k \|A_k - A\| = 0 \Leftrightarrow \lim_k a_k^{ij} = a^{ij},\ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Prima echivalenţă este chiar definiţia convergenţei, pentru ultima echivalenţă se pot folosi, de exemplu, majorările

$$|a^{ij}| \leq \|A\|,\ \forall i, j = 1, \ldots, n$$

şi

$$\|A\| \leq n \max_{i,j} |a^{ij}|.$$

valabile pentru orice matrice $A = (a^{ij})$.

Convergenţa seriilor de matrice se caracterizează tot pe componente

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = S \Leftrightarrow \lim_k \sum_{h=0}^{k} A_h = S \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij} = s^{ij},\ \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

adică: seria matricelor este matricea seriilor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k^{ij}) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij}).$$

Lema 1. (criteriul de comparaţie) *Dacă* $\|A_k\| \leq \alpha_k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *şi* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < +\infty$ *atunci seria* $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Pentru orice $i, j = 1, \ldots, n$ fixaţi, avem

$$|a_k^{ij}| \leq \|A_k\| \leq \alpha_k$$

pentru orice k, şi atunci, din criteriul de comparţie pentru serii numerice cu termeni pozitivi, urmează

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{ij}| < +\infty$$

adică seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij}$ este absolut convergentă şi, prin urmare, este o serie convergentă.

Revenim la determinarea matricei $S_A(t)$ sub forma unei serii de puteri în t cu coeficienţi matriceali şi observăm că seria (2) este de fapt o matrice de serii de puteri. Mai precis, dacă notăm $A_k = (a_k^{ij})$ atunci pentru seria (2) avem

$$S_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \big(a_k^{ij}\big) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{ij} t^k\big).$$

Presupunem acum că aceste n^2 serii de puteri în t au raza minimă de convergenţă nenulă $\rho > 0$ şi atunci pe $(-\rho, \rho)$ le putem deriva termen cu termen, şi obţinem

$$S_A^{'}(t) = \big(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k^{ij} t^{k-1}\big) = \big(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}^{ij} t^k\big) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k A_{k+1}.$$

Comparând această serie cu

$$AS_A(t) = A \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A A_k$$

tragem concluzia că dacă sunt respectate relaţiile

$$(k+1)A_{k+1} = AA_k, \forall k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

atunci $S_A^{'}(t) = AS_A(t)$. Din $S_A(0) = I$ găsim $A_0 = I$ şi apoi, din aproape în aproape,

$$A_k = \frac{1}{k!} A^k, \forall k = 1, 2, 3 \ldots$$

Obţinem pentru $S_A(t)$ următoarea formă

$$S_A(t) = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots . \tag{3}$$

Acum va trebui să verificăm forma găsită, adică să arătăm că seria (3) este convergentă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi că suma sa are proprietăţile definitorii pentru $S_A(t)$. Prin analogie cu dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale

$$e^{ta} = 1 + \frac{t}{1!}a + \frac{t^2}{2!}a^2 + \frac{t^3}{3!}a^3 + \cdots ,$$

vom nota cu e^{tA} suma seriei (3), deci, prin definiţie

$$e^{tA} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots . \tag{4}$$

Teorema 1. *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ seria (4) este convergentă pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În plus, suma ei e^{tA} este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi fie $t \in \mathbb{R}$ fixat arbitrar. Aplicăm criteriul de comparaţie: deoarece

$$\|\frac{t^k}{k!}A^k\| \leq \frac{|t|^k}{k!}\|A\|^k$$

şi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\|A\|^k = e^{|t|\|A\|} < +\infty$$

rezultă că seria (4) este convergentă pentru orice t. Prin urmare, toate cele n^2 serii de puteri în t care compun seria (4) au raza de convergenţă infinită şi pot fi derivate termen cu termen.

Avem

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kt^{k-1}}{k!}A^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^{k+1} = A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right)A,$$

adică are loc (5).

Consecinţă.

(i) $S_A(t) = e^{tA}$;

(ii) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA}$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$;

(iii) dacă $AB = BA$ atunci $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(iv) dacă $A = Q^{-1}BQ$ atunci $e^{tA} = Q^{-1}e^{tB}Q$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(v) $e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}$.

Demonstraţie. Punctul (i): am arătat că matricea $X(t) = e^{tA}$ verifică problema Cauchy matriceală (1) şi, prin urmare, coincide cu $S_A(t)$.

Punctul (ii) se obţine din Propoziţia 1,(i).

Pentru a demonstra (iii), să observăm că, dacă $AB = BA$, atunci

$$e^{tA}B = Be^{tA} \tag{6}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $AB = BA$ atunci $A^kB = BA^k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, relaţie care împreună cu definiţia matricei e^{tA} implică (6). Din (6) şi din (5) rezultă că

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{tB}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)e^{tB} + e^{tA}\frac{d}{dt}\left(e^{tB}\right) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Această egalitate ne arată că $X(t) = e^{tA}e^{tB}$ este matricea fundamentală a sistemului

$$x' = (A + B)x$$

care satisface $X(0) = I$ şi, prin urmare, $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Dacă $A = Q^{-1}BQ$ atunci $A^k = Q^{-1}B^kQ$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^{-1}B^kQ = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k\right) Q,$$

ceea ce demonstrează (iv).

În sfârşit, (v) rezultă din (ii) pentru $s = -t$.

Observaţie. Unica soluţie a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

cu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ continuă, $a \in I$ şi $\xi \in \mathbb{R}^n$, este dată de formula variaţiei constantelor care, scrisă pentru matricea fundamentală $X(t) = e^{tA}$, capătă forma

$$x(t) = e^{(t-a)A}\xi + \int_a^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds \tag{7}$$

pentru orice $t \in I$.

Observaţie. Considerăm sistemul diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi în corpul numerelor complexe

$$z'(t) = \Lambda z(t), \tag{8}$$

unde $\Lambda \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Prin soluţie a acestui sistem înţelegem o funcţie $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, de clasă C^1 şi care satisface (8) pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Înzestrăm $\mathbb{C}^n$ cu norma

$$\|z\| = \max_j\{|z_j|\}$$

şi observăm că o funcţie $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ este de clasă C^1 dacă şi numai toate funcţiile componente $z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ sunt de clasă C^1, iar acestea, la rândul lor, sunt continue şi derivabile numai dacă părţile lor reale şi imaginare, $x_j(t)$ şi $y_j(t)$, sunt continue şi derivabile ca funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.

Mai mult, avem formula de derivare

$$(x(t) + iy(t))' = x'(t) + iy'(t),$$

pentru orice t pentru care există $x'(t)$ şi $y'(t)$ şi astfel, pentru $\Lambda = A + iB$ cu $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sistemul (8) devine

$$x' + iy' = (A + iB)(x + iy) \Leftrightarrow x' + iy' = (Ax - By) + i(Bx + Ay) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = Ax - By \\ y' = Bx + Ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

adică este echivalent cu un sistem liniar omogen cu coeficienţi constanţi cu $2n$ ecuaţii şi $2n$ funcţii necunoscute reale. Deducem de aici că toate consideraţiile făcute în această secţiune sunt valabile şi pentru sistemul (8).

Pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ considerăm norma

$$\|\Lambda\| = \max_i\{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{ij}|\},$$

pentru orice $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Convergenţa indusă de acestă normă este tot convergenţa pe componente şi se observă că, exact ca în cazul real, funcţia exponenţială de matrice

$$e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\Lambda^k$$

este bine definită pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi are exact aceleaşi proprietăţi ca în cazul $\Lambda \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$