Cursul 8
(*plan de curs*)

§1 Exemplu de calcul pentru e^{tA}. Vom calcula, pe baza definiţiei, matricea e^{tA} pentru

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

În acest scop asociem matricei A numărul complex $\lambda = a + ib$ şi îl scriem sub forma trigonometrică

$$\lambda = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Prin calcul direct se constată că

$$A = \rho\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, A^2 = \rho^2\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \dots,$$

$$A^n = \rho^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Aşadar

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\cos n\theta & \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\sin n\theta \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\sin n\theta & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\cos n\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}.$$

Aici am folosit formulele

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\cos n\theta = e^{at}\cos bt, \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}\sin n\theta = e^{at}\sin bt$$

care provin din dezvoltarea în serie a funcţiei

$$e^{\lambda t} = e^{at+ibt} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt),$$

şi anume

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\rho^n}{n!}(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Concluzie. Sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

are soluţia generală

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{at} \cos bt - c_2 e^{at} \sin bt \\ y(t) = c_1 e^{at} \sin bt + c_2 e^{at} \cos bt. \end{cases}$$

§2 Determinarea matricei e^{tA} cu forma canonică Jordan

Prezentăm aici o metodă de determinare a matricei e^{tA} utilizând *forma canonică Jordan* a unei matrice. Începem prin a reaminti că, pentru orice matrice cu elemente complexe $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, există o matrice nesingulară $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, astfel încât

$$A = Q^{-1} J Q, \tag{1}$$

unde J este forma canonică Jordan a matricei A şi, prin urmare,

$$e^{tA} = Q^{-1} e^{tJ} Q, \tag{2}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Mai precis, dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots m_s$, $\sum_{p=1}^{s} m_p = n$, atunci J este o matrice diagonală de blocuri : J_{pj}, $p = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, h_p$,

$$J = \text{diag}\ (J_{11}, \ldots, J_{1h_1}, J_{21}, \ldots, J_{2h_2}, \ldots, J_{s1}, \ldots, J_{sh_s})$$

astfel că e^{tJ} este, de asemenea, o matrice diagonală de blocuri

$$e^{tJ} = \text{diag}\ \left(e^{tJ_{11}}, \ldots, e^{tJ_{1h_1}}, e^{tJ_{21}}, \ldots, e^{tJ_{2h_2}}, \ldots, e^{tJ_{s1}}, \ldots, e^{tJ_{sh_s}}\right) \tag{3}$$

Aici, J_{pj}, pentru $p = 1, 2, \ldots, s$ şi $j = 1, 2, \ldots, h_p$, sunt *celulele Jordan* corespunzătoare rădăcinii caracteristice λ_p, adică

$$J_{pj} = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_{pj}\times m_{pj}}(\mathbb{C}).$$

Notând cu

$$I_{pj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } E_{pj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

avem că $J_{pj} = \lambda_p I_{pj} + E_{pj}$. Cum tE_{pj} şi $t\lambda_p I_{pj}$ comută, urmează că

$$e^{tJ_{pj}} = e^{tE_{pj}+t\lambda_p I_{pj}} = e^{t\lambda_p I_{pj}} e^{tE_{pj}} = e^{t\lambda_p} I_{pj} e^{tE_{pj}} = e^{t\lambda_p} e^{tE_{pj}}. \tag{4}$$

Este uşor de văzut că puterile matricei E_{pj} sunt de forma

$$E_{pj}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; E_{pj}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; \dots$$

cu $E_{pj}^{m_{pj}}$ matricea nulă. Aşadar seria care defineşte matricea exponenţială $e^{tE_{pj}}$ are numai primii m_{pj} termeni nenuli şi suma lor este

$$e^{tE_{pj}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_{pj}-1}}{(m_{pj}-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{m_{pj}-2}}{(m_{pj}-2)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Din (4) urmează

$$e^{tJ_{pj}} = e^{\lambda_p t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_{pj}-1}}{(m_{pj}-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{m_{pj}-2}}{(m_{pj}-2)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

iar din (3) obţinem forma explicită a matricei e^{tJ}. În final, matricea e^{tA} se determină din produsul (2).

Teorema 1. (structura matricei e^{tA}) *Dacă $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ iar $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2 \dots, s$, sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice*

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

având multiplicităţile m_k, $k = 1, 2 \dots, s$, atunci toate elementele matricei e^{tA} sunt de forma

$$\sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k t} \left(P_k(t) \cos \beta_k t + Q_k(t) \sin \beta_k t \right),$$

unde P_k şi Q_k sunt polinoame cu coeficienţi reali de grad cel mult $m_k - 1$.

Demonstraţie. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ o rădăcină a ecuaţiei $\det(A - \lambda I) = 0$. Ţinând cont de faptul că

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \left(\cos \beta t + i \sin \beta t\right),$$

utilizând (5), (3) şi observând că, deşi Q^{-1}, e^{tJ} şi Q sunt matrici cu elemente numere complexe, produsul $Q^{-1}e^{tJ}Q = e^{tA}$ este în mod necesar o matrice cu elemente numere reale, obţinem concluzia teoremei.

Observaţie. Funcţiile de forma

$$\sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k t} \left(P_k(t) \cos \beta_k t + Q_k(t) \sin \beta_k t\right),$$

sunt numite *cvasi-polinoame.*

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

§1 Ecuaţii liniare de ordin n. Existenţa şi unicitatea globală

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ continue. Considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n neomogenă

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots a_n(t)y = f(t), \tag{E.L.N}$$

şi ecuaţia omogenă ataşată

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots a_n(t)y = 0. \tag{E.L.O}$$

Prin soluţie înţelegem o funcţie $y : \tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n care verifică ecuaţia pe un interval $\tilde{I} \subset I$.

Ştim că orice ecuaţie scalară de ordin n în variabila y este echivalentă cu un sistem de n ecuaţii de ordinul întâi în variabilele $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $\ldots$, $x_n = y^{(n-1)}$.

În cazul nostru, ecuaţia (E.L.N) se rescrie sub forma sistemului liniar neomogen

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t), \end{cases}$$

care are forma matriceală

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{S.L.N}$$

cu

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \text{ şi } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Evident că ecuaţia diferenţială liniară omogenă (E.L.O) se transformă în sistemul liniar omogen ataşat

$$x' = A(t)x \tag{S.L.O}$$

Teorema 1. (de existenţă şi unicitate globală) *Pentru orice $a \in I$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ problema Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t) \\ y(a) = \xi_1, y'(a) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n \end{cases}$$

are o soluţie globală unică.

§2 Ecuaţii liniare omogene de ordin n. Spaţiul soluţiilor

Notăm

$$\mathcal{S}_n = \{y : I \to \mathbb{R} \text{ soluţie pentru (E.L.O)}\} \subset C^n(I, \mathbb{R})$$

şi

$$\mathcal{S} = \{x : I \to \mathbb{R}^n \text{ soluţie pentru (S.L.O)}\} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n).$$

Ştim că $\mathcal{S}$ este subspaţiu vectorial în $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ cu $\dim(\mathcal{S}) = n$.

Lema 1. *$\mathcal{S}_n$ este subspaţiu vectorial în $C^n(I, \mathbb{R})$, iar operatorul $T : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}$ definit de*

$$T(y) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

pentru orice $y \in \mathcal{S}_n$, este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Demonstraţie. $\mathcal{S}_n$ este un subspaţiu vectorial al lui $C^n(I; \mathbb{R})$ deoarece orice combinaţie liniară a două soluţii a ecuaţiei omogene (E.L.O) este soluţie pentru aceeaşi ecuaţie.

Liniaritatea lui T rezultă imediat din liniaritatea operaţiei de derivare, adică din proprietatea

$$(\alpha y(t) + \beta z(t))' = \alpha y'(t) + \beta z'(t),$$

pentru orice $t \in I$. În plus, din $T(y) = 0$ rezultă imediat $y = 0$, deci nucleul său este subspaţiul nul,

$$\mathrm{Ker}(T) = \{y \in \mathcal{S}_n |\ T(y) = 0\} = \{0\},$$

de unde rezultă că T este un operator liniar injectiv.

A mai rămas de arătat că $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{S}$. Dacă $x \in \mathrm{Im}(T)$ atunci există o soluţie $y = y(t)$ a ecuaţiei (E.L.O) astfel încât $x = T(y)$, adică $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, …, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, pentru orice $t \in I$. Sistemul (S.L.O) a fost astfel construit încât, în acest caz, $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ să fie o soluţie a sa, deci $x \in \mathcal{S}$.

Reciproc, dacă $x \in \mathcal{S}$, adică dacă $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ este o soluţie a sistemului (S.L.O) atunci se constată uşor că prima componentă a sa, $x_1 = x_1(t)$, este de clasă C^n ca funcţie de la I în $\mathbb{R}$, având derivatele

$$x_1' = x_2,\ x_1'' = x_3, \ldots, x_1^{(n-1)} = x_n$$

şi

$$x_1^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_1' - \cdots - a_1(t)x_1^{(n-1)},$$

adică $T(x_1) = x$ şi $x_1 \in \mathcal{S}_n$, de unde urmează că $x \in \mathrm{Im}(T)$.

Am arătat că $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{S}$ şi, prin urmare, $T : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}$ este un operator liniar bijectiv, adică un izomorfism de spaţii linare.

Teorema 2. *Mulţimea soluţiilor saturate ale ecuaţiei omogene* (E.L.O) *este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste $\mathbb{R}$. Mai mult, pentru orice $a \in I$, aplicaţia $S_a : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^n$ dată de*

$$S_a(y) = (y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)),$$

pentru orice $y \in \mathcal{S}_n$, este un izomorfism de spaţii liniare.

Demonstraţie. Ştim deja că spaţiile $\mathcal{S}_n$ şi $\mathcal{S}$ sunt izomorfe, deci $\dim(\mathcal{S}_n) = \dim(\mathcal{S}) = n$. Pentru a doua parte a teoremei, este suficient să observăm că S_a este compunerea a două izomorfisme de spaţii liniare, mai precis

$$S_a(y) = \Gamma_a(T(y)),$$

pentru orice $y \in \mathcal{S}_n$, unde $\Gamma_a : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ este dat de

$$\Gamma_a(x) = x(a),$$

pentru orice $x \in \mathcal{S}$.

Observaţia 1. Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{S}_n$ este o bază, orice element $y \in \mathcal{S}_n$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei,

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \tag{1}$$

pentru orice $t \in I$.

Pentru orice sistem de n soluţii $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{S}_n$ definim *matricea asociată* $Y : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ prin

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in I$.

Observaţie. Matricea $Y(t)$ a fost definită astfel încât să aibă loc egalitatea

$$Y(t) = X(t),$$

unde

$$X(t) = [\,T(y_1), T(y_2), \dots, T(y_n)\,]$$

este matricea asociată sistemului de soluţii

$$\{x^1 = T(y_1), x^2 = T(y_2), \dots, x^n = T(y_n)\} \subset \mathcal{S}.$$

Definiţia 1. Sistemul $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{S}_n$ poartă numele de *sistem fundamental de soluţii* al ecuaţiei (E.L.O) dacă el constituie o bază în spaţiul liniar $\mathcal{S}_n$. Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii poartă numele de *matrice fundamentală* a ecuaţiei (E.L.O).

Definiţia 2. Dacă Y este matricea asociată unui sistem de soluţii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ din $\mathcal{S}_n$, determinantul său

$$W(t) = \det Y(t), \ t \in I,$$

se numeşte *wronskianul* asociat acestui sistem de soluţii.

Observaţie. Întrucât aplicaţia T este un izomorfism între $\mathcal{S}_n$ şi $\mathcal{S}$, rezultă că un sistem de soluţii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei (E.L.O) este fundamental dacă şi numai dacă $x^1 = T(y_1)$, $x^2 = T(y_2)$, $\ldots$, $x^n = T(y_n)$, este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen (S.L.O).

Teorema 3. *Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem de soluţii saturate ale ecuaţiei* (E.L.O), *fie Y matricea şi respectiv W wronskianul, asociate sistemului de soluţii. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *matricea Y este fundamentală*;

(ii) $W(t) \neq 0$ *pentru orice* $t \in I$;

(iii) *există $a \in I$ astfel încât $W(a) \neq 0$.*

Concluzia rezultă din teorema corespunzătoare de la sisteme liniare omogene, aplicată sistemului (S.L.O).

Teorema 4. (Liouville) *Fie W wronskianul unui sistem de n soluţii saturate ale ecuaţiei* (E.L.O). *Atunci*

$$W(t) = W(a) \exp\left(-\int_a^t a_1(s)\, ds\right) \tag{2}$$

pentru orice $t \in I$, unde $a \in I$ este fixat.

Concluzia rezultă din Teorema lui Liouville aplicată sistemului (S.L.O), observând că, în acest caz, urma matricei $A(t)$ este egală cu $-a_1(t)$.

§3 Ecuaţii liniare neomogene de ordin n. Metoda variaţiei constantelor

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n neomogenă

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots a_n(t)y = f(t), \tag{E.L.N}$$

şi ecuaţia omogenă ataşată

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots a_n(t)y = 0, \tag{E.L.O}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (E.L.O). Ştim că soluţia generală a ecuaţiei omogene este dată de formula

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t),$$

unde constantele c_i sunt arbitrare, ele reprezentând coordonatele lui $y = y(t)$ în baza $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ a spaţiului liniar $\mathcal{S}_n$.

Teorema 5. *Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii pentru* (E.L.O) *şi fie $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ o soluţie oarecare a ecuaţiei* (E.L.N)*. Funcţia $y : I \to \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei* (E.L.N) *dacă şi numai dacă are forma*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + \tilde{y}(t) \tag{3}$$

pentru orice $t \in I$, unde c_1, c_2, $\ldots$, $c_n \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Se repetă raţionamentul de la teorema corespunzătoare în cazul sistemelor liniare, arătând că diferenţa a două soluţii pentru (E.L.N) este o soluţie pentru (E.L.O).

Observaţie. Teorema afirmă că soluţia generală a ecuaţiei neomogene este dată de formula

$$y_{\text{S.G.N}} = y_{\text{S.G.O}} + \tilde{y}_{\text{S.P.N}}.$$

Teorema 6. (metoda variaţiei constantelor) *Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei* (E.L.O)*. Atunci ecuaţia neomogenă* (E.L.N) *admite o soluţie particulară de forma*

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t),$$

unde $c_i : I \to \mathbb{R}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt funcţii de clasă C^1 care verifică sistemul

$$\begin{cases} y_1(t)c_1'(t) + y_2(t)c_2'(t) + \cdots + y_n(t)c_n'(t) = 0 \\ y_1'(t)c_1'(t) + y_2'(t)c_2'(t) + \cdots + y_n'(t)c_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + y_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) + \cdots + y_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 \\ y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + y_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t) \end{cases} \tag{4}$$

pentru orice $t \in I$.

Demonstraţie. Se observă că $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t)$, este o soluţie a ecuaţiei (E.L.N) dacă şi numai dacă $x(t) = Y(t)c(t)$ este o soluţie a sistemului (S.L.N) corespunzător, unde $c(t)$ este vectorul coloană ale cărui componente sunt $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\ldots$, $c_n(t)$. Atunci, din demonstraţia formulei variaţiei constantelor de la sisteme liniare, rezultă că c trebuie să satisfacă relaţia

$$Y(t)c'(t) = b(t),$$

pentru orice $t \in I$, adică exact sistemul (4). Cum, pentru orice $t \in I$, avem $W(t) = \det Y(t) \neq 0$, sistemul liniar algebric (4) în necunoscutele $c_1'(t)$, $c_2'(t)$, $\ldots$, $c_n'(t)$ este de tip Cramer şi, prin urmare, acestea sunt bine determinate.

Exemplu. Considerăm ecuaţia liniară neomogenă

$$y'' - y = \frac{e^t}{e^t + 1}.$$

Se observă că ecuaţia omogenă ataşată

$$y'' - y = 0$$

admite soluţiie $y_1(t) = e^t$ şi $y_2(t) = e^{-t}$ care formează un sistem fundamental de soluţii deoarece

$$W(t) = \det Y(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y_{S.G.O} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$\tilde{y}(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t},$$

unde c_1' şi c_2' se determină din sistemul variaţiei constantelor:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{e^t+1} \end{pmatrix}.$$

Sistemul liniar algebric de mai sus se rezolvă prin regula lui Cramer, de exemplu, şi se obţine

$$\begin{cases} c_1' = \frac{1}{2(e^t+1)} \\ c_2' = -\frac{e^{2t}}{2(e^t+1)} \end{cases}$$

de unde, prin alegerea unor primitive convenabile, urmează

$$\begin{cases} c_1 = \int \frac{1}{2(e^t+1)} dt = \frac{1}{2}(t - \ln(e^t + 1)) \\ c_2 = -\int \frac{e^{2t}}{2(e^t+1)} dt = \frac{1}{2}(\ln(e^t + 1) - e^t), \end{cases}$$

şi, prin urmare,

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\big(te^t - 1 + (e^{-t} - e^t)\ln(e^t + 1)\big).$$

În final, obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene:

$$y_{S.G.N} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\big(te^t - 1 + (e^{-t} - e^t)\ln(e^t + 1)\big).$$