Cursul 9

(plan de curs)

Ecuaţii liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi

§1 Ecuaţii omogene. Considerăm ecuaţia de ordinul n liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0, \tag{E.L.O*}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$; vom arăta că determinarea unui sistem fundamental de soluţii se reduce la rezolvarea ecuaţiei polinomiale

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{1}$$

Să observăm, pentru început, că o funcţie de forma $y(t) = e^{\lambda t}$ verifică ecuaţia (E.L.O*) dacă şi numai dacă

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda t} = 0,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică dacă şi numai dacă $P(\lambda) = 0$. Din acest motiv ecuaţia polinomială (1) se numeşte *ecuaţia caracteristică* ataşată ecuaţiei (E.L.O*), $P(\lambda)$ se numeşte *polinomul caracteristic* ataşat ecuaţiei, iar rădăcinile sale se numesc *rădăcini caracteristice.*

Mai mult, să observăm că şi în cazul unei rădăcini caracteristice complexe, $\lambda \in \mathbb{C}$, funcţia $z(t) = e^{\lambda t}$ verifică ecuaţia (E.L.O*) considerată pentru funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{C}$, deoarece şi în acest caz avem

$$z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n z(t) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t} = 0.$$

Deoarece coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt reali, rezultă imediat că atât partea reală, cât şi partea imaginară a funcţiei $z(t) = e^{\lambda t}$ verifică exact aceeaşi ecuaţie, şi am arătat astfel că, dacă $\lambda = a + ib$ cu $b \neq 0$ este o rădăcină caracteristică, atunci funcţiile

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\; e^{(a+ib)t} = e^{at}\cos bt$$

şi

$$y_2(t) = \mathrm{Im}\; e^{(a+ib)t} = e^{at}\sin bt$$

sunt soluţii ale ecuaţiei (E.L.O*).

Aceste observaţii ne permit ca, în cazul în care polinomul caracteristic are numai rădăcini simple, să determinăm exact n soluţii ale ecuaţiei (E.L.O*) care, conform teoremei următoare, formează un sistem fundamental de soluţii. Teorema precizează şi ce se întâmplă în cazul rădăcinilor multiple.

Teorema de generare a unui sistem fundamental de soluţii. *Presupunem că am reuşit să determinăm toate rădăcinile polinomului caracteristic ataşat ecuaţiei* (E.L.O*). *Atunci, ataşând fiecărei rădăcini reale $\lambda \in \mathbb{R}$, de multiplicitate m, funcţiile*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t},$$

şi ataşând fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate $\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *de multiplicitate* m, *funcţiile*

$$e^{at}\cos bt,\ te^{at}\cos bt,\ t^2e^{at}\cos bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\cos bt,$$

şi

$$e^{at}\sin bt,\ te^{at}\sin bt,\ t^2e^{at}\sin bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\sin bt,$$

obţinem un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (E.L.O*).

Demonstraţie. Deoarece polinomul caracteristic are coeficienţi reali, rădăcinile din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ apar în perechi complex conjugate, şi cum suma multiplicităţilor tuturor rădăcinilor este n, deducem imediat că în urma aplicării procedeului din enunţul teoremei se obţine un sistem format din exact n funcţii, notat în continuare cu

$$\mathcal{F} = \{y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_n(t)\}.$$

Vom arăta că elementele lui $\mathcal{F}$ formează un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial $\mathcal{S}_n$ al soluţiilor ecuaţiei omogene (E.L.O*). În acest caz, deoarece $\dim(\mathcal{S}_n) = n$, va rezulta că $\mathcal{F}$ formează o bază în $\mathcal{S}_n$, adică un sistem fundamental de soluţii.

Ştim că, prin intermediul transformării

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \ldots, x_n = y^{(n-1)}$$

ecuaţia (E.L.O*) este echivalentă cu sistemul liniar omogen

$$x'(t) = Ax(t), \tag{S.L.O*}$$

cu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Sistemul de mai sus având coeficienţii constanţi, soluţia sa generală este dată de formula

$$x(t) = e^{tA}c,$$

cu c un vector coloană format din n constante arbitrare. Rezultă că $y = x_1(t)$, prima componentă a vectorului $x = x(t)$, este o combinaţie liniară a componentelor aflate pe prima linie în matricea e^{tA}. Am arătat astfel că orice soluţie a ecuatiei (E.L.O*), $y \in \mathcal{S}_n$, este o combinaţie liniară de componente din e^{tA}.

Să observăm acum, prin calcul direct, dezvoltând determinantul după ultima linie, că polinomul caracteristic ataşat matricei A, $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, are forma

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

adică el coincide cu polinomul $P(\lambda)$ ataşat ecuaţiei (E.L.O*) şi, prin urmare, rădăcinile caracteristice ataşate matricei A sunt exact cele ataşate ecuaţiei omogene (E.L.O*), cu aceleaşi ordine de multiplicitate. Din teorema de structură a matricei e^{tA} urmează atunci că fiecare componentă a sa este o combinaţie liniară de funcţii din $\mathcal{F}$.

Am arătat că $\mathcal{F}$ este un sistem de generatori format din n elemente al spaţiului liniar n dimensional $\mathcal{S}_n$ şi, prin urmare, este o bază în acest spaţiu.

Exemplu. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y^{\mathrm{v}} + 3y^{\mathrm{iv}} + 5y''' + 5y'' + 3y' + y = 0. \tag{2}$$

Rezolvare. Ataşăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

care este o ecuaţie reciprocă de grad 5, prin urmare admite rădăcina $\lambda_1 = -1$. După împărţirea la $\lambda + 1$, cu schema lui Horner, bineînţeles, se obţine o ecuaţie reciprocă de grad 4 care se rezolvă cu substituţia $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$. În final, avem descompunerea

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)^2.$$

Aplicăm algoritmul de generare a unui sistem fundamental de soluţii:

Rădăcina reală $\lambda_1 = -1$ are multiplicitatea $m = 1$, ea generează soluţia

$$y_1(t) = e^{-t}.$$

Perechea de rădăcini complexe conjugate $\lambda_{2,3} = \lambda_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ are $m = 2$ şi generează soluţiile

$$y_2 = e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_3 = te^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_4 = e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_5 = te^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Obţinem soluţia generală a ecuaţiei (2) sub forma

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}}\left((c_2 + c_3 t)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + (c_4 + c_5 t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

§2 Ecuaţii neomogene. Fie $I \subset \mathbb{R}$ şi $f \in C^0(I)$ o funcţie continuă pe I, cu valori reale sau complexe. Ecuaţiei liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t), \tag{E.L.N*}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, îi ataşăm ecuaţia omogenă corespunzătoare

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{E.L.O*}$$

şi *operatorul diferenţial* $L : C^n(I) \to C^0(I)$ definit prin

$$(Ly)(t) = y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t),$$

pentru orice $y \in C^n(I)$. Cu ajutorul acestuia ecuaţia (E.L.N*) poate fi scrisă sub forma operatorială

$$Ly = f,$$

cu $y \in C^n(I)$.

Aici am notat cu $C^n(I)$ unul din spaţiile $C^n(I,\mathbb{R})$ sau $C^n(I,\mathbb{C})$, după cum considerăm cadrul de lucru.

Este uşor de văzut că operatorul L este liniar, iar spaţiul liniar $\mathcal{S}_n$ al soluţiilor ecuaţiei (E.L.O*) este chiar nucleul acestuia

$$\mathcal{S}_n = \operatorname{Ker} L \subset C^n(I).$$

Ştim că, după aflarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (E.L.O*), rezolvarea ecuaţiei neomogene se reduce la aflarea unei soluţii particulare $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ pentru (E.L.N*). Aceasta poate fi aflată, pentru orice funcţie continuă f, prin metoda variaţiei constantelor. Totuşi, dacă f este un cvasipolinom, adică o funcţie de forma

$$f(t) = e^{at}(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt)$$

cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ funcţii polinomiale în variabila t, se poate determina o soluţie particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ căutând-o tot sub forma unui cvasipolinom, după cum vom justifica în continuare.

Să observăm că L aplicat unei funcţii de forma $y(t) = t^k e^{\lambda t}$ are ca rezultat

$$(Ly)(t) = (t^k e^{\lambda t})^{(n)} + a_1(t^k e^{\lambda t})^{(n-1)} + \cdots + a_n t^k e^{\lambda t} = P_k(t)e^{\lambda t},$$

unde $P_k(t)$ este un polinom de grad egal sau mai mic decât k. Din liniaritatea lui L urmează imediat că L aplicat unei funcţii de forma $y(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ cu $Q(t) = b_0t^k + b_1t^{k-1} + \cdots + b_k$ are ca rezultat tot o funcţie de forma $P_k(t)e^{\lambda t}$.

Aceste considerente ne sugerează ca, în cazul în care termenul liber al ecuaţiei (E.L.N*) are forma

$$f(t) = P_k(t)e^{\lambda t} \tag{3}$$

cu $P_k(t)$ un polinom de grad k, să căutăm o soluţie particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ tot de aceeaşi formă, adică

$$\tilde{y}(t) = Q_h(t)e^{\lambda t}$$

cu $Q_h(t)$ un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi având gradul h “suficient de mare”.

Mai precis, se poate demonstra că totdeauna există o astfel de soluţie particulară de forma

$$\tilde{y}(t) = t^m Q_k(t)e^{\lambda t} \tag{4}$$

unde m este ordinul de multiplicitate al lui λ în ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei omogene (E.L.O*), iar $\operatorname{grad} Q_k = k = \operatorname{grad} P_k$. Aici se consideră că $m = 0$ dacă λ nu este rădăcină caracteristică.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$y'' - 4y = (8t+6)e^{2t}. \tag{5}$$

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială liniară omogenă corespunzătoare

$$Ly = y'' - 4y = 0,$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 2$, deci soluţia sa generală este

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

Deoarece termenul liber

$$f(t) = (8t + 6)e^{2t}$$

este de forma $f(t) = P_1(t)e^{\lambda t}$ cu $\lambda = 2$ rădăcină caracteristică cu multiplicitatea $m = 1$, vom căuta soluţia particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ sub forma

$$\tilde{y}(t) = t(At + B)e^{2t}.$$

Derivând şi introducând în ecuaţie se obţine

$$L\tilde{y} = \tilde{y}'' - 4\tilde{y} = \big(8At + (2A + 4B)\big)e^{2t},$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, rezultă sistemul triunghiular

$$\begin{cases} 8A & = 8 \\ 2A + 4B & = 6, \end{cases}$$

cu soluţia $A = 1$, $B = 1$.

Am găsit

$$\tilde{y}(t) = t(t + 1)e^{2t},$$

şi, în consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei (5) este

$$y_{S.G.N} = y_{S.G.O}(t) + \tilde{y}_{S.P.N}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + t(t + 1)e^{2t}.$$

Toată discuţia de până acum este valabilă şi în $C^n(I, \mathbb{R})$, şi în $C^n(I, \mathbb{C})$. Să observăm că, deoarece coeficienţii a_i sunt reali, operatorul diferenţial L are proprietatea

$$\begin{aligned} Ly = L(u + iv) &= (u + iv)^{(n)} + a_1(u + iv)^{(n-1)} + \cdots + a_n(u + iv) \\ &= u^{(n)} + iv^{(n)} + a_1(u^{(n-1)} + iv^{(n-1)}) + \cdots + a_n(u + iv) \\ &= Lu + iLv, \end{aligned}$$

pentru orice $y = u + iv \in C^n(I, \mathbb{C})$, adică

$$\operatorname{Re} Ly = L\operatorname{Re} y \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} Ly = L\operatorname{Im} y,$$

pentru orice $y \in C^n(I, \mathbb{C})$. Prin urmare, din $Ly = f(t)$ rezultă

$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} Ly = L\operatorname{Re} y,$$

adică, dacă $y = y(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (E.L.N*) cu termenul liber $f(t)$, atunci partea reală a sa este o soluţie a ecuaţiei (E.L.N*) cu termenul liber $\operatorname{Re} f(t)$.

Să observăm că pentru $f(t)$ de forma (3) cu $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, avem

$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} P_k(t)e^{(a+ib)t} = e^{at}\big(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt\big)$$

cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali. Analog, pentru $y = \tilde{y}(t)$ de forma (4) avem

$$\operatorname{Re}\tilde{y}(t) = \operatorname{Re} t^m Q_k(t) e^{(a+ib)t} = t^m e^{at}\big(Q_k^1(t)\cos bt + Q_k^2(t)\sin bt\big)$$

cu $Q_k^1(t)$ şi $Q_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali.

În concluzie, considerând numai soluţii cu valori reale, dacă termenul liber are forma

$$f(t) = e^{at}(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt) \tag{6}$$

cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali de grad mai mic sau egal cu k, atunci ecuaţia (E.L.N*) admite o soluţie particulară de forma

$$\tilde{y}(t) = t^m e^{at}\big(Q_k^1(t)\cos bt + Q_k^2(t)\sin bt\big) \tag{7}$$

cu $Q_k^1(t)$ şi $Q_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali de grad cel mult k, unde m este ordinul de multiplicitate al numărului complex $\lambda = a+ib$ în ecuaţia caracteristică.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$y'' - y = -2t\sin t. \tag{8}$$

Rezolvare. Ecuaţia omogenă

$$y'' - y = 0,$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 1$, deci soluţia sa generală este

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

Termenul liber

$$f(t) = -2t\sin t$$

este un cvasipolinom de forma (6), cu numărul complex ataşat $\lambda = a + bi = i$ şi cu gradul maxim $k = 1$. Deoarece $\lambda = i$ nu este rădăcină caracteristică, avem $m = 0$. Căutăm soluţia particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ sub forma (7) care devine

$$\tilde{y}(t) = (At + B)\sin t + (Ct + D)\cos t.$$

Efectuând calculele necesare, obţinem

$$(L\tilde{y})(t) = \tilde{y}''(t) - \tilde{y}(t) = (-2At - 2B - 2C)\sin t + (-2Ct - 2D + 2A)\cos t,$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, obţinem sistemul

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ -2B - 2C = 0 \\ -2C = 0 \\ -2D + 2A = 0, \end{cases}$$

cu soluţia $A = D = 1$ şi $B = C = 0$. Am găsit soluţia particulară

$$\tilde{y}(t) = t\sin t + \cos t,$$

astfel că soluţia generală a ecuaţiei (8) are forma

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + t\sin t + \cos t,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

§3 Ecuaţii Euler. Ecuaţia

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t), \qquad \text{(E. Euler)}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, numită *ecuaţia lui Euler*, se transformă într-o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de argument $t = e^s$.

Definim $\tilde{y}(s) = y(e^s)$, pentru orice $s \in \mathbb{R}$. Din echivalenţa

$$t = e^s = t(s) \;\Leftrightarrow\; s = \ln t = s(t),$$

rezultă $\tilde{y}(s(t)) = \tilde{y}(\ln t) = y(t)$ pentru orice $t > 0$.

Derivatele lui y în raport cu t le vom calcula "prin s", ţinând cont că

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{t} = t^{-1}.$$

Avem

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\frac{1}{t} = t^{-1}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t)).$$

Mai departe:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right) = -t^{-2}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t)) + t^{-1}\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t))\frac{ds}{dt}(t) =$$

$$= t^{-2}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right).$$

Încă un pas:

$$\frac{d^3y}{dt^3}(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{-2}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right)\right) =$$

$$-2t^{-3}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right) + t^{-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right)\frac{ds}{dt} =$$

$$= t^{-3}\left(\frac{d^3\tilde{y}}{ds^3}(s(t)) - 3\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) + 2\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right).$$

Se poate arăta, prin inducţie, că există constantele α_{jk} astfel încât

$$\frac{d^ky}{dt^k}(t) = t^{-k}\left(\alpha_{1k}\frac{d^k\tilde{y}}{ds^k}(s(t)) + \alpha_{2k}\frac{d^{k-1}\tilde{y}}{ds^{k-1}}(s(t)) \cdots + \alpha_{kk}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right),$$

pentru orice $k \geq 1$. Este clar că, înlocuind în ecuaţia (E. Euler) produsele $t^k \dfrac{d^k y}{dt^k}$ cu combinaţii liniare de derivate $\dfrac{d^h \tilde{y}}{ds^h}$, obţinem o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi în funcţia necunoscută $\tilde{y}(s)$, având termenul liber $\tilde{f}(s) = f(e^s)$. După rezolvarea acesteia obţinem soluţia generală sub forma

$$\tilde{y}(s) = c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_n\varphi_n(s) + \tilde{\varphi}_{SPN}(s)$$

şi revenim în argumentul t astfel

$$y(t) = \tilde{y}(s(t)) = \tilde{y}(\ln t) = c_1\varphi_1(\ln t) + \cdots + c_n\varphi_n(\ln t) + \tilde{\varphi}_{SPN}(\ln t),$$

pentru orice $t > 0$.

Observaţie. Consideraţii analoage arată că şi ecuaţiile de forma

$$(\alpha t + \beta)^n y^{(n)} + (\alpha t + \beta)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t),$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sunt reductibile la ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare cu coeficienţi constanţi.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$(t+3)^3 y''' + (t+3)y' - y = 3(t+3)^4. \tag{9}$$

Rezolvare. Efectuăm substituţia $t + 3 = e^s \Leftrightarrow s = \ln(t+3)$. Derivatele în raport cu t le notăm cu prim iar pe cele în raport cu s le notăm cu punct. Avem

$$s' = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t+3} = (t+3)^{-1}$$

şi prin urmare

$$y' = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{y}s' = (t+3)^{-1}\dot{y}.$$

Mai departe

$$y'' = \frac{d}{dt}\big((t+3)^{-1}\dot{y}\big) = -(t+3)^{-2}\dot{y} + (t+3)^{-1}\ddot{y}s' = (t+3)^{-2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

şi

$$y''' = \frac{d}{dt}\big((t+3)^{-2}(\ddot{y} - \dot{y})\big) = -2(t+3)^{-3}(\ddot{y} - \dot{y}) + (t+3)^{-2}(\dddot{y} - \ddot{y})s' =$$

$$= (t+3)^{-3}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}).$$

Înlocuim în ecuaţia (9) şi obţinem ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 3e^{4s}. \tag{10}$$

Ecuaţia omogenă ataşată

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 0$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci ecuaţia omogenă are soluţia generală

$$y_{SGO} = (c_1 + c_2 s + c_3 s^2)e^s.$$

Cvasipolinomul $f(s) = 3e^{4s}$ are ataşat numărul complex $\lambda = 4 + 0i$ care, nefiind rădăcină caracteristică, are multiplicitatea $m = 0$, prin urmare căutăm pentru ecuaţia neomogenă o soluţie particulară de forma

$$\bar{y}(s) = Ae^{4s}$$

şi, după câteva calcule, găsim

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{9}e^{4s}.$$

Ecuaţia (10) are soluţia generală

$$y = (c_1 + c_2 s + c_3 s^2)e^s + \frac{1}{9}e^{4s},$$

iar ecuaţia iniţială are soluţia

$$y = \big(c_1 + c_2 \ln(t+3) + c_3 \ln^2(t+3)\big)(t+3) + \frac{1}{9}(t+3)^4.$$

Soluţii analitice pentru ecuaţii diferenţiale liniare

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots a_n(t)y = f(t), \tag{11}$$

şi presupunem că funcţiile $a_1, a_2, \dots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ sunt analitice într-un $t = t_0$ din intervalul deschis I.

Amintim că o funcţie $y : I \to \mathbb{R}$ este *analitică* pe intervalul deschis I dacă este indefinit derivabilă pe I şi dezvoltabilă în serie Taylor în orice punct din I. Avem următoarea caracterizare: o funcţie indefinit derivabilă este analitică pe I dacă şi numai dacă, pentru orice compact $K \subset I$, există $M > 0$ şi $a > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{y^{(n)}(t)}{n!}\right| \leq Ma^n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in K$.

Spunem că $y : I \to \mathbb{R}$ este *analitică în* $t_0 \in I$ dacă este indefinit derivabilă pe o vecinătate a lui t_0 şi dezvoltabilă în serie Taylor în t_0, altfel spus y este suma unei serii de puteri de forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (t - t_0)^n,$$

cu raza de convergenţă $\rho > 0$, caz în care ea este analitică pe întreg domeniul de convergenţă $(t_0 - \rho, t_0 + \rho) \cap I$.

Pentru a simplifica expunerea vom considera ecuaţii de ordin doi omogene, cazul general fiind similar. Considerăm ecuaţia

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{12}$$

cu p şi q funcţii analitice într-un $t = t_0$ şi ataşăm ecuaţiei condiţiile iniţiale

$$y(t_0) = \xi_0, \quad y'(t_0) = \xi_1. \tag{13}$$

Teorema 1. *Dacă p şi q sunt funcţii analitice în punctul $t = t_0$, atunci unica soluţie a problemei Cauchy* (12) *şi* (13) *este şi ea analitică în $t = t_0$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $t_0 = 0$ şi, pentru funcţiile p şi q, folosim dezvoltările

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n. \tag{14}$$

Vom rezolva problema Cauchy (12) şi (13) căutând soluţia sub forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{15}$$

Vom presupune, pentru început, că aceste trei serii de puteri sunt convergente cel puţin pe un interval comun $(-\rho, \rho)$, cu $\rho > 0$. Pe acest interval avem

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \tag{16}$$

şi

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n. \tag{17}$$

Introducând dezvoltările (14), (15), (16) şi (17) în ecuaţia (12) şi ordonând după puterile lui t, obţinem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right] t^n = 0$$

pentru orice $t \in (-\rho, \rho)$ şi, în consecinţă, $y = y(t)$ este o soluţie pentru ecuaţia (12) dacă şi numai dacă toţi coeficienţii seriei de puteri de mai sus sunt nuli. Rezultă următoarele relaţii de recurenţă:

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right], \tag{18}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece primii doi coeficienţi sunt determinaţi de condiţiile iniţiale, mai precis $a_0 = y(t_0) = \xi_0$ şi $a_1 = y'(t_0) = \xi_1$, urmează că soluţia problemei Cauchy (12) şi (13) este perfect determinată de relaţiile de mai sus. Mai rămâne de arătat doar că seria de puteri (15), cu coeficienţii a_n astfel calculaţi, are raza de convergenţă nenulă.

Fixăm în mod arbitrar un $R > 0$ strict mai mic decât raza de convergenţă minimă a seriilor de puteri (14). În acest caz, seriile numerice $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n R^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n R^n$ sunt absolut convergente, de unde rezultă că şirurile $p_n R^n$ şi $q_n R^n$ tind la zero, deci sunt mărginite: există $M > 0$ astfel încât

$$\mid p_n \mid \leq \frac{M}{R^n} \text{ şi } \mid q_n \mid \leq \frac{M}{R^n}, \tag{19}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta, prin inducţie după n, că există un $P > 0$ astfel încât

$$\mid a_n \mid \leq \frac{P^n}{R^n} \tag{20}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar, presupunem că pentru $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ avem

$$\mid a_k \mid \leq \frac{P^k}{R^k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

şi arătăm (20) pentru a_{n+2}. Avem

$$\begin{aligned}
\mid a_{n+2} \mid &\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) \mid a_{k+1} \mid\mid p_{n-k} \mid + \sum_{k=0}^{n} \mid a_k \mid\mid q_{n-k} \mid \right] \\
&\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{P^{k+1}}{R^{k+1}} \frac{M}{R^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k}{R^k} \frac{M}{R^{n-k}} \right] \\
&\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{R^{n+2}} \left[MR \sum_{k=0}^{n} (n+1) P^{k+1} + MR^2 \sum_{k=0}^{n} P^k \right] \\
&\leq \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{k=n+1} P^k}{R^{n+2}} \leq \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{P^{n+2}}{R^{n+2}},
\end{aligned}$$

valabilă pentru orice $P > 2$. Cum

$$\lim_{n \to \infty} \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} = 0,$$

rezultă că există un $n_0 \in \mathbb{N}$ care nu depinde de P astfel încât

$$\frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \leq 1,$$

pentru orice $n \geq n_0$ şi, prin urmare, dacă $n \geq n_0$ atunci din ipoteza

$$\mid a_k \mid \leq \frac{P^k}{R^k}, \text{ pentru orice } k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

urmează că

$$| a_{n+2} | \leq \frac{P^{n+2}}{R^{n+2}}.$$

Alegem acum $P > 2$ suficient de mare astfel încât să avem

$$|a_k| \leq \frac{P^k}{R^k} \text{ pentru } k = 0, 1, 2, ..., n_0 + 1,$$

şi atunci rezultă, prin inducţie, că (20) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform formulei Cauchy-Hadamard vom avea pentru raza de convergenţă ρ_0 a seriei de puteri (15) estimarea

$$\frac{1}{\rho_0} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{P}{R}$$

şi, prin urmare, $\rho_0 \geq \dfrac{R}{P} > 0$.

Exemplu. Vom aplica metoda seriilor de puteri pentru *ecuaţia lui Airy*, una dintre cele mai simple ecuaţii liniare de ordin doi cu coeficienţi variabili:

$$y'' - ty = 0. \tag{21}$$

Ecuaţia este importantă în aplicaţii, ea apare în studiul fenomenului de difracţie, de exemplu, şi deşi este foarte simplă, ea nu poate fi integrată prin metode elementare.

Căutăm soluţii sub forma

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots . \tag{22}$$

Derivăm

$$y'(t) = 1a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \cdots$$
$$y''(t) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 t + 3 \cdot 4a_4 t^2 + 4 \cdot 5a_5 t^3 + 5 \cdot 6a_6 t^t \cdots$$

şi comparăm seria lui $y''(t)$ cu seria

$$ty(t) = 0 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + \cdots .$$

Obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2\, a_2 &= 0 \\ 2 \cdot 3\, a_3 &= a_0 \\ 3 \cdot 4\, a_4 &= a_1 \\ 4 \cdot 5\, a_5 &= a_2 \\ 5 \cdot 6\, a_6 &= a_3 \\ 6 \cdot 7\, a_7 &= a_4 \\ \cdots\cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

de unde, din aproape în aproape, deducem

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{a_0}{2\cdot 3} \\
a_4 &= \frac{a_1}{3\cdot 4} \\
a_5 &= \frac{a_2}{4\cdot 5} = 0 \\
a_6 &= \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)} \\
a_7 &= \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)} \\
a_8 &= \frac{a_5}{7\cdot 8} = 0 \\
a_9 &= \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)(8\cdot 9)} \\
\cdots & \quad \cdots
\end{aligned}$$

Se observă că, pentru orice $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
& a_{3k-1} = 0, \\
& a_{3k} = \frac{1}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}\cdot a_0, \\
& a_{3k+1} = \frac{1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots((3k)\cdot(3k+1))}\cdot a_1.
\end{aligned}$$

Introducem aceste relaţii în seria (22) şi schimbăm ordinea de sumare astfel încât să apară factorii a_0 şi a_1. Obţinem soluţia generală a ecuaţiei (21) sub forma

$$y(t) = a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t),$$

unde

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}$$

şi

$$y_2(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots((3k)\cdot(3k+1))}.$$

Este uşor de văzut că seriile de puteri care definesc funcţiile de mai sus au raza de convergenţă infinită, deci $y = y_1(t)$ şi $y = y_2(t)$ sunt bine definite pentru orice t real. Mai mult, să remarcăm că $y = y_1(t)$ este soluţia ecuaţiei (21) cu datele iniţiale $y_1(0) = 1$ şi $y_1'(0) = 0$, iar $y = y_2(t)$ este soluţia cu datele $y_2(0) = 0$ şi $y_2'(0) = 1$ şi, prin urmare, ele formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia lui Airy.