Cursul 10

(*plan de curs*)

Teoria stabilităţii

§1. Tipuri de stabilitate. Fie Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω.

Ştim că, pentru orice $a \in \mathbb{R}_+ = [\,0, +\infty)$ şi orice $\xi \in \Omega$, problema Cauchy formată din sistemul diferenţial

$$x' = f(t, x) \tag{SD}$$

şi condiţia iniţială

$$x(a) = \xi,$$

are o soluţie saturată la dreapta unică, notată în continuare cu $x = x(t, a, \xi)$, definită pe un interval maximal $[\,a, T_{a,\xi})$.

Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ o soluţie a sistemului (SD) definită pe întreaga semiaxă[1].

Definiţie. Soluţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ se numeşte *simplu stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \varphi(a)\| \leq \delta(\varepsilon, a)$ avem că

(i) $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\|x(t, a, \xi) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \in [\,a, +\infty)$.

Dacă $\delta(\varepsilon, a)$ poate fi ales independent de a, soluţia φ se numeşte *uniform stabilă*.

Definiţie. Soluţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ se numeşte *asimptotic stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi în plus pentru orice $a \geq 0$ există $\mu(a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \varphi(a)\| \leq \mu(a)$:

(i) $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t, a, \xi) - \varphi(t)\| = 0$.

Dacă, în plus, φ este uniform stabilă, $\mu(a) > 0$ poate fi ales independent de a, iar limita (ii) este uniformă în raport cu a, atunci soluţia φ se numeşte *uniform asimptotic stabilă*.

Observaţie. Spunem că limita (ii) este *uniformă în raport cu* a dacă

$$\lim_{t-a \to +\infty} \|x(t, a, \xi) - \varphi(t)\| = 0,$$

adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $T(\varepsilon) \geq 0$ astfel încât $t - a > T(\varepsilon)$ implică $\|x(t, a, \xi) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

Observaţie. Toate cele patru concepte de stabilitate definite mai sus se referă la proprietăţi ale unei soluţii a sistemului (SD) şi nu la proprietăţi ale sistemului. Mai precis, există sisteme care posedă atât soluţii stabile cât şi soluţii instabile.

---

[1]Atenţie: problema stabilităţii se pune numai pentru soluţii definite pe întreg intervalul $[\,0, +\infty)$.

Exemplu. Considerăm ecuaţia diferenţială

$$x' = x(1-x),$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile şi poate fi integrată prin metode elementare. Obţinem

$$x(t,a,\xi) = \frac{\xi e^{t-a}}{1+\xi(e^{t-a}-1)},$$

pentru orice $a \geq 0$ şi $\xi \in \mathbb{R}$. Observăm că, pentru $\xi \geq 0$, soluţia saturată $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ cu

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,a,\xi) = 1,$$

iar pentru $\xi < 0$, soluţia este definită pe intervalul $[\,a, a+H)$ cu $H = \ln(1-\frac{1}{\xi}) > 0$ şi

$$\lim_{t\nearrow a+H} x(t,a,\xi) = -\infty.$$

Vom analiza, pentru simplitate, numai stabilitatea soluţiilor staţionare (constante). Soluţia $x = \varphi(t)$ este staţionară dacă $\varphi'(t) = 0$ pentru orice t, adică dacă

$$\varphi(t)(1-\varphi(t)) = 0$$

pentru orice t, de unde deducem că ecuaţia admite numai soluţiile staţionare

$$\varphi_0(t) = 0 \text{ pentru orice } t \in [\,0, +\infty)$$

şi

$$\varphi_1(t) = 1 \text{ pentru orice } t \in [\,0, +\infty).$$

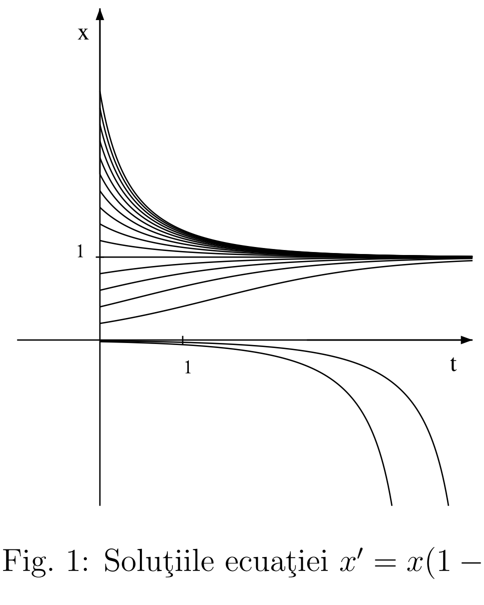

Fig. 1: Soluţiile ecuaţiei $x' = x(1-x)$.

Este uşor de văzut că, deoarece pentru orice $\xi < 0$ soluţia saturată $x(\cdot, 0, \xi)$ nu este definită pe întreaga semiaxă $[\,0, +\infty)$, soluţia nulă $x = \varphi_0(t)$ este instabilă.

Pe de altă parte, oricare ar fi $a \geq 0$ şi $\xi \geq 0$, avem

$$|x(t,a,\xi) - \varphi_1(t)| = |x(t,a,\xi) - 1| = \left|\frac{\xi - 1}{1+\xi(e^{t-a}-1)}\right| \leq |\xi - 1|,$$

pentru orice $t \geq a$, de unde rezultă că în definiţia stabilităţii uniforme putem alege, de exemplu, $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ şi obţinem că soluţia $x = \varphi_1(t)$ este uniform stabilă.

Mai mult, din

$$\lim_{t-a\to+\infty} x(t,a,\xi) = \lim_{t-a\to+\infty} \frac{\xi e^{t-a}}{1+\xi(e^{t-a}-1)} = 1,$$

pentru orice $\xi > 0$, rezultă că $x = \varphi_1(t)$ este chiar uniform asimptotic stabilă.

Observaţie. Prin transformarea $y = x - \varphi(t)$ studiul stabilităţii oricărei soluţii $x = \varphi(t)$ a sistemului (SD) se reduce la studiul stabilităţii soluţiei nule a sistemului

$$y'(t) = f(t, y(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)).$$

Din acest motiv, în tot ceea ce urmează, vom presupune că $0 \in \Omega$, $f(t,0) = 0$ şi ne vom limita numai la studiul stabilităţii soluţiei identic nule a sistemului (SD).

Pentru simplitate vom relua definiţiile anterioare în cazul particular $\varphi \equiv 0$.

Definiţie. Soluţia nulă a sistemului (SD) se numeşte *simplu stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ care satisface $\|\xi\| \leq \delta(\varepsilon, a)$:

(i) $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\|x(t, a, \xi)\| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \in [\,a, +\infty)$.

Dacă $\delta(\varepsilon, a)$ poate fi ales independent de a, soluţia nulă se numeşte *uniform stabilă*.

Definiţie. Soluţia nulă a sistemului (SD) se numeşte *asimptotic stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi în plus pentru orice $a \geq 0$ există $\mu(a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu(a)$:

(i) $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\lim_{t\to+\infty} \|x(t, a, \xi)\| = 0$.

Dacă, în plus, soluţia nulă este uniform stabilă, $\mu(a) > 0$ poate fi ales independent de a, iar limita (ii) este uniformă în raport cu a, atunci soluţia nulă se numeşte *uniform asimptotic stabilă*.

§2. Stabilitatea sistemelor liniare. Considerăm sistemul liniar

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{S.L.N}$$

şi sistemul liniar omogen corespunzător

$$x' = A(t)x, \tag{S.L.O}$$

unde $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$, $b(t) = (b_j(t))_{1\times n}$, cu a_{ij} şi b_j funcţii continue de la $\mathbb{R}_+$ în $\mathbb{R}$.

Din teorema de existenţă globală pentru sisteme liniare, rezultă că în acest caz orice soluţie saturată este definită pe întreaga semiaxă $\mathbb{R}_+ = [\,0, +\infty)$.

Teorema 1. *Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, o soluţie oarecare a sistemului liniar* (S.L.N)*. Soluţia $x = \varphi(t)$ este simplu, uniform, asimptotic sau uniform asimptotic stabilă după cum soluţia nulă a sistemului omogen* (S.L.O) *este simplu, uniform, asimptotic sau, respectiv, uniform asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. După cum am văzut în cazul general, studiul stabilităţii soluţiei $x = \varphi(t)$ a sistemului (S.L.N) se reduce, prin transformarea $y = x - \varphi(t)$, la studiul stabilităţii soluţiei nule a sistemului

$$y' = A(t)(y + \varphi(t)) + b(t) - \varphi'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = A(t)y + A(t)\varphi(t) + b(t) - \varphi'(t) \Leftrightarrow y' = A(t)y.$$

Observaţie. În cazul sistemelor liniare, stabilitatea este o proprietate a sistemului deoarece toate soluţiile unui sistem liniar acelaşi tip de stabilitate, şi anume tipul de stabilitate al soluţiei nule a sistemului omogen ataşat. Din acest motiv punem vorbi, în cazul limiar, despre sisteme stabile şi nu numai despre soluţii stabile.

Subliniem că, deoarece sistemul liniar neomogen (S.L.N) are acelaşi tip de stabilitate ca sistemul omogen ataşat, (S.L.O), în continuare ne vom referi numai la cazul omogen.

Teorema 2. *Sistemul* (S.L.O) *este simplu stabil dacă şi numai dacă admite o matrice fundamentală mărginită, iar, în acest caz, orice altă matrice fundamentală este mărginită.*

Demonstraţie. Notăm cu $x = x(t, a, \xi)$ unica soluţie saturată a sistemului (S.L.O) care satisface condiţia iniţială $x(a) = \xi$.

Fie $X = X(t)$ o matrice fundamentală mărginită pentru (S.L.O), cu

$$\|X(t)\| \leq M,$$

pentru orice $t \geq 0$. Ştim că, pentru orice $a \geq 0$ şi $\xi \in \mathbb{R}^n$, soluţia $x = x(t, a, \xi)$ are forma

$$x(t, a, \xi) = X(t)X^{-1}(a)\xi,$$

pentru orice $t \geq 0$. Prin urmare,

$$\|x(t, a, \xi)\| = \|X(t)X^{-1}(a)\xi\| \leq \|X(t)\|\|X^{-1}(a)\|\|\xi\| \leq$$

$$\leq M\|X^{-1}(a)\|\|\xi\| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $t \geq 0$, dacă

$$\|\xi\| \leq \delta(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon}{M\|X^{-1}(a)\|},$$

şi astfel am arătat că soluţia nulă a sistemului (S.L.O) este simplu stabilă.

Reciproc, dacă presupunem că (S.L.O) este simplu stabil, atunci pentru $\varepsilon = 1$ şi $a = 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\xi\| \leq \delta$ avem

$$\|x(t, 0, \xi)\| \leq 1,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Notăm cu

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; \dots \; e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Considerând pe rând $\xi^1 = \delta e^1$, $\xi^2 = \delta e^2$, $\dots$, $\xi^n = \delta e^n$ obţinem sistemul de n soluţii mărginite

$$x^1(t) = x(t, 0, \xi^1),\ x^2(t) = x(t, 0, \xi^2),\ \dots, x^n(t) = x(t, 0, \xi^n)$$

având wronskianul calculat în origine egal cu

$$W(0) = \det X(0) = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta \end{vmatrix} = \delta^n \neq 0,$$

şi formând, prin urmare, un sistem fundamental de soluţii cu matricea fundamentală ataşată mărginită

$$\|X(t)\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |x_i^j(t)| \leq n,$$

pentru orice $t \geq 0$, deoarece pentru fiecare $i, j = 1, \dots, n$,

$$|x_i^j(t)| \leq \|x^j(t)\| = \|x(t, 0, \xi^j)\| = \max_i |x_i(t, 0, \xi^j)| \leq 1,$$

pentru orice $t \geq 0$.

Am arătat astfel că sistemul (S.L.O) are o matrice fundamentală mărginită.

Să observăm că dacă o matrice fundamentală $X = X(t)$ este mărginită atunci orice altă matrice fundamentală $Y = Y(t)$ este mărginită deoarece, după cum ştim, ea este de forma $Y(t) = X(t)C$ cu $C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrice nesingulară, şi atunci

$$\|Y(t)\| = \|X(t)C\| \leq \|X(t)\|\|C\| \leq M\|C\|,$$

pentru orice $t \geq 0$.

Teorema 3. *Sistemul* (S.L.O) *este asimptotic stabil dacă şi numai dacă admite o matrice fundamentală* $X(t)$ *cu*

$$\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0,$$

iar, în acest caz, orice altă matrice fundamentală are această proprietate.

Demonstraţie. Se repetă argumentaţia de la teorema precedentă, înlocuind majorarea $\|X(t)\| \leq M$ cu

$$\|X(t)\| \leq M(t),$$

unde $M(t) \to 0$ pentru $t \to +\infty$.

Observaţie. În cazul în care sistemul (S.L.O) este asimptotic stabil rezultă că, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x(t,a,\xi)\| = \|X(t)X^{-1}(a)\xi\| \le \|X(t)\|\|X^{-1}(a)\|\|\xi\| \to 0 \text{ pentru } t \to +\infty,$$

şi, prin urmare,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,a,\xi) = 0$$

pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ şi orice $a \ge 0$, adică sistemul (S.L.O) este *global asimptotic stabil*. În cazul sistemului neomogen (S.L.N), aceasta înseamnă că diferenţa dintre oricare două soluţii tinde la zero pentru $t \to +\infty$.

Amintim că, dacă $X = X(t)$ este o matrice fundamentală, atunci

$$U(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$$

este *matricea rezolventă* sau *evolutorul* sistemului. Matricea rezolventă ataşată sistemului (S.L.O) este unică, nu depinde de matricea fundamentală $X(t)$, iar soluţiile sistemului sunt date de formula

$$x(t,a,\xi) = U(t,a)\xi,$$

pentru orice $t \ge a$.

Teorema 4. *Sistemul* (S.L.O) *este uniform stabil dacă şi numai dacă matricea sa rezolventă* $U = U(t,a)$ *este mărginită pentru* $t \ge a \ge 0$*, adică dacă există* $M \ge 0$ *astfel încât*

$$\|U(t,a)\| \le M,$$

pentru orice $a \ge 0$ *şi orice* $t \ge a$*.*

Demonstraţie. Presupunem că $\|U(t,a)\| \le M$ pentru orice $t \ge a \ge 0$. Atunci

$$\|x(t,a,\xi)\| = \|U(t,a)\xi\| \le \|U(t,a)\|\|\xi\| \le M\|\xi\| \le \varepsilon,$$

pentru orice $t \ge a$, dacă

$$\|\xi\| \le \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M},$$

şi astfel am arătat că soluţia nulă a sistemului (S.L.O) este uniform stabilă.

Reciproc, presupunem acum că soluţia nulă a sistemului (S.L.O) este uniform stabilă. Atunci, pentru $\varepsilon_0 = 1$, există $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0) > 0$ astfel încât, pentru orice $a \ge 0$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\xi\| \le \delta_0$, avem

$$\|x(t,a,\xi)\| = \|U(t,a)\xi\| \le 1,$$

pentru orice $t \ge a$.

Definim $M_0 = \frac{1}{\delta_0}$ şi vom arăta că $\|U(t,a)\| \le M_0$, pentru orice $t \ge a \ge 0$.

Fie t şi a fixaţi, $t \ge a \ge 0$. Notăm $U(t,a) = (u_{ij})$ şi fie i_0 indicele unei linii pe care se atinge maximul în calculul normei

$$\|U(t,a)\| = \|(u_{ij})\| = \max_i \sum_{j=1}^n |u_{ij}| = \sum_{j=1}^n |u_{i_0 j}|.$$

Definim vectorul coloană

$$v = \begin{pmatrix} \operatorname{sign} u_{i_0 1} \\ \operatorname{sign} u_{i_0 2} \\ \vdots \\ \operatorname{sign} u_{i_0 n} \end{pmatrix}.$$

Este clar că $\|v\| \leq 1$ şi atunci, pentru $\xi = \delta_0 v$ cu $\|\xi\| = \delta_0 \|v\| \leq \delta_0$, avem

$$1 \geq \|U(t,a)\xi\| = \delta_0 \|U(t,a)v\| =$$

$$= \delta_0 \max_i |\sum_j u_{ij} v_j| \geq \delta_0 |\sum_j u_{i_0 j} v_j| = \delta_0 \sum_j |u_{i_0 j}| = \delta_0 \|U(t,a)\|,$$

de unde urmează că $\|U(t,a)\| \leq M_0$, aşa cum am anunţat.

Teorema 5. *Sistemul* (S.L.O) *este uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă matricea sa rezolventă are proprietatea*

$$\lim_{t-a\to+\infty} \|U(t,a)\| = 0.$$

Demonstraţie. Să observăm că (S.L.O) este uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă este uniform stabil şi

$$\lim_{t-a\to+\infty} \|x(t,a,\xi)\| = 0,$$

pentru orice ξ cu norma suficient de mică. Concluzia rezultă din Teorema 4, ţinând cont că $x(t,a,\xi) = U(t,a)\xi$.

§3. Stabilitatea sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi. Considerăm sistemul liniar neomogen

$$x' = Ax + b(t), \tag{1}$$

cu $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice constantă. Ştim că stabilitatea acestuia este dată de stabilitatea sistemului omogen ataşat,

$$x' = Ax, \tag{2}$$

mai precis de stabilitatea soluţiei nule a acestuia.

Vom caracteriza stabilitatea sistemului (2) utilizând matricea fundamentală

$$X(t) = e^{tA}.$$

Să observăm, pentru început, că în acest caz matricea rezolventă are forma

$$U(t,a) = X(t)X^{-1}(a) = e^{tA}e^{-aA} = e^{(t-a)A}$$

şi, prin urmare, $U(t,a)$ este mărginită pentru $t \geq a$ dacă şi numai dacă matricea e^{tA} este mărginită pentru $t \geq 0$, deci în acest caz stabilitatea uniformă este echivalentă cu stabilitatea simplă[2] şi, analog, stabilitatea asimptotică uniformă este echivalentă cu stabilitatea asimptotică simplă care este caracterizată de

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{tA}\| = 0.$$

Reţinem că la sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, omogene sau neomogene, stabilitatea simplă este echivalentă cu cea uniformă, din acest motiv în continuare ne vom referi numai la stabilitatea simplă.

Pentru a discerne cazurile în care matricea $X(t) = e^{tA}$ este mărginită sau are limita zero la $+\infty$ vom utiliza forma canonică Jordan J a matricei A. Notăm cu $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matricea nesingulară pentru care $A = Q^{-1}JQ$, ştim că în acest caz $e^{tA} = Q^{-1}e^{tJ}Q$ şi din

$$e^{tA} = Q^{-1}e^{tJ}Q \;\Leftrightarrow\; e^{tJ} = Qe^{tA}Q^{-1}$$

obţinem

$$\|e^{tA}\| \le \|Q^{-1}\|\|e^{tJ}\|\|Q\| \text{ şi } \|\, e^{tJ}\| \le \|Q\|\|e^{tA}\|\|Q^{-1}\|,$$

de unde rezultă următoarele două echivalenţe:

$$e^{tA} \text{ este mărginită pe } [\,0,+\infty) \Leftrightarrow\; e^{tJ} \text{ este mărginită pe } [\,0,+\infty)$$

şi

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{tA}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} \|e^{tJ}\| = 0.$$

Am justificat astfel următorul rezultat auxiliar:

Lema 1. *Sistemul* (2) *este stabil dacă şi numai dacă matricea* $Y(t) = e^{tJ}$ *este mărginită pe* $[\,0,+\infty)$ *şi este asimptotic stabil dacă şi numai dacă*

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{tJ}\| = 0.$$

Să analizăm acum structura matricei $Y(t) = e^{tJ} = (y_k^j(t))$. Ştim că elementele sale nenule sunt de forma

$$y_k^j(t) = \frac{t^h}{h!}e^{\lambda t} = \frac{t^h}{h!}e^{(a+ib)t} = \frac{t^h}{h!}e^{at}(\cos bt + i\sin bt), \tag{3}$$

unde $\lambda = a+ib$ este rădăcină caracteristică a matricei A iar $h \in \{0,1,\dots\, m-1\}$, cu m ordinul celulei Jordan corespunzătoare lui y_k^j. Observăm că

$$|y_k^j(t)| = \frac{t^h}{h!}e^{at}|\cos bt + i\sin bt| = \frac{t^h}{h!}e^{at} = \frac{1}{h!}\varphi(t),$$

cu $\varphi(t) = t^h e^{at}$ pentru $t \in [\,0,+\infty)$. Este uşor de văzut că funcţiile de forma

$$\varphi(t) = t^h e^{at},\; t \in [\,0,+\infty),$$

[2]Această echivalenţă are loc de fapt pentru orice *sistem diferenţial autonom*, adică pentru orice sistem de forma $x' = f(x)$, deoarece mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem este închisă la translaţii în raport cu argumentul t. Într-adevăr, se verifică imediat că dacă $x = \varphi(t)$ este o soluţie, atunci şi $x = \psi(t)$, cu $\psi(t) = \varphi(t-a)$ este o soluţie a sistemului, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

au următoarea comportare:

(1°) dacă $a < 0$ atunci $\varphi(t) \to 0$ pentru $t \to +\infty$;

(2°) dacă $a > 0$ atunci φ este nemărginită pe $[0, +\infty)$;

(3°a) dacă $a = 0$ şi $h = 0$ atunci φ este constantă, deci este mărginită;

(3°b) dacă $a = 0$ şi $h > 0$ atunci φ este nemărginită pe $[0, +\infty)$;

Ţinând cont de aceste observaţii, din Lema 1 obţinem următorul *criteriu de stabilitate* pentru sisteme liniare cu coeficienţi constanţi:

Teorema 6. *Considerăm sistemul diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi*

$$x' = Ax + b(t),$$

cu $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă oarecare şi notăm cu* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ *rădăcinile polinomului caracteristic*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

asociat matricei A. Atunci

(1°) *dacă* $\forall\, i$, $Re\,\lambda_i < 0$, *atunci sistemul este asimptotic stabil*;

(2°) *dacă* $\exists\, i_0$ *cu* $Re\,\lambda_{i_0} > 0$, *atunci sistemul este instabil*;

(3°) *dacă* $\forall\, i$, $Re\,\lambda_i \leq 0$ *şi* $\exists\, i_0$ *cu* $Re\,\lambda_{i_0} = 0$ *atunci sunt posibile numai următoarele două sitaţii:*

  (3°a) *dacă pentru orice rădăcină caracteristică* λ_i *cu* $Re\,\lambda_i = 0$ *toate celulele Jordan asociate acesteia au ordinul* 1, *atunci atunci sistemul este stabil*;

  (3°b) *dacă există o rădăcină caracteristică* λ_i *cu* $Re\,\lambda_{i_0} = 0$ *care are asociată măcar o celulă Jordan de ordin strict mai mare decât* 1, *atunci sistemul este instabil.*

Amintim că ordinul unei celule Jordan este totdeauna mai mic sau cel mult egal cu multiplicitatea rădăcinii carateristice asociate, deci dacă sistemul este în cazul (3°) şi toate rădăcinile caracteristice cu partea reală nulă au multiplicitatea unu, sistemul este stabil deoarece se află în situaţia (3°a).

Aşadar, în aplicarea acestui criteriu, avem nevoie de determinarea efectivă a formei canonice Jordan numai dacă suntem în cazul (3°) şi printre rădăcinile cu partea reală nulă există una cu multiplicitatea strict mai mare decât unu.

În continuare vom detalia cazul de stabilitate asimptotică, cazul (1°) de mai sus.

Definiţie. Matricea A se numeşte *hurwitziană* dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\lambda I - A) = 0$ au partea reală strict negativă.

Lema 2. *Dacă* A *este hurwitziană atunci există constantele* $M \geq 1$ *şi* $\omega > 0$ *astfel încât*

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}$$

pentru orice $t \geq 0$.

Demonstraţie. Este evident că pentru orice matrice hurwitziană putem fixa un $\omega > 0$ astfel încât

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i + \omega < 0$$

pentru orice rădăcină caracteristică λ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Fie $J = QAQ^{-1}$ forma canonică Jordan a matricei A. Considerând că elementele matricei e^{tJ} sunt date de (3), vom avea

$$\|e^{tJ}\| = e^{-t\omega}\|Z(t)\|,$$

unde toate elementele matricei Z sunt de forma

$$z(t) = t^h e^{(a+\omega)t}(\cos bt + i \sin bt)$$

cu $a + \omega = \mathrm{Re}\,\lambda + \omega < 0$ şi, în consecinţă, sunt mărginite pe $[\,0, +\infty)$. Rezultă că există $M_0 \geq 0$ astfel încât

$$\|Z(t)\| \leq M_0$$

pentru orice $t \geq 0$. Obţinem că

$$\|e^{tA}\| = \|Q^{-1}e^{tJ}Q\| \leq \|Q^{-1}\|\|e^{tJ}\|\|Q\| \leq Me^{-\omega t},$$

pentru orice $t \geq 0$, unde am notat $M = M_0\|Q^{-1}\|\|Q\|$.

Observaţie. Fie A o matrice hurwitziană şi fie $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}$ pentru orice $t \geq 0$. Atunci pentru orice soluţie a sistemului (2) avem

$$\|x(t, a, \xi)\| = \|e^{(t-a)A}\xi\| \leq e^{-\omega(t-a)}M\|\xi\| \to 0 \text{ pentru } t \to +\infty,$$

şi din acest motiv spunem că sistemul este *global asimptotic exponenţial stabil.*

Datorită importanţei cazului de stabilitate asimptotică, au fost stabilite criterii pentru a decide dacă o matrice este hurwitziană sau dacă un polinom are toate rădăcinile cu partea reală strict negativă, caz în care este numit *polinom hurwitzian.* De exemplu, pentru polinoame de gradul 3 criteriul este următorul:

Polinomul

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

este hurwitzian dacă şi numai dacă

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0 \ \text{ şi } a_1 a_2 > a_3.$$

Exemplu. Sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 \\ x_3' = x_2 - x_3, \end{cases}$$

are matricea ataşată

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 10,$$

care, conform criteriului de mai sus[3], este hurwitzian, deci A este matrice hurwitziană şi, prin urmare, sistemul diferenţial este asimptotic stabil.

[3]De fapt $P_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 + 6\lambda + 10)$ şi are rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -3 \pm i$, toate cu partea reală strict negativă.