Cursul 11

(plan de curs)

Teoria stabilităţii (2)

§4. Stabilitatea soluţiilor ecuaţiilor liniare de ordin n. Stabilitatea unei soluţii $y = y(t)$, cu $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, a ecuaţiei diferenţiale de ordin n,

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

se defineşte ca fiind stabilitatea soluţiei corespunzătoare $x = x(t)$, $x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, a sistemului format din n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases}$$

obţinut prin transformarea

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \dots,\ x_n = y^{(n-1)}.$$

Atragem atenţia că în acest caz, pentru oricare două soluţii ale ecuaţiei, y şi $\tilde{y}$, distanţa dintre $y(t)$ şi $\tilde{y}(t)$ se consideră a fi distanţa dintre vectorii corespunzători $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ şi $(\tilde{y}(t), \tilde{y}'(t), \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(t))$, adică

$$\max\{|y(t) - \tilde{y}(t)|, |y'(t) - \tilde{y}'(t)|, \dots, |y^{(n-1)}(t) - \tilde{y}^{(n-1)}(t)|\}.$$

În cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin n, sistemul ataşat este şi el liniar, şi astfel rezultatele de stabilitate de la sisteme liniare se transferă cuvânt cu cuvânt la ecuaţii liniare. De exemplu, orice soluţie a unei ecuaţii liniare neomogene este stabilă dacă şi numai dacă soluţia nulă a ecuaţiei omogene corespunzătoare este stabilă.

Pentru ecuaţia liniară omogenă cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0, \tag{E.L.O*}$$

cu $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sistemul diferenţial corespunzător este sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$x' = Ax, \tag{S.L.O*}$$

cu matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

având proprietatea că polinomul caracteristic ataşat ei coincide cu polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei (E.L.O*), adică

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Din Teorema de generare a unui sistem fundamental de soluţii pentru (E.L.O*), ştim că orice soluţie este o combinaţie liniară de funcţii $\varphi = \varphi(t)$ de forma

$$\varphi(t) = t^h e^{at} \cos bt \quad \text{sau} \quad \varphi(t) = t^h e^{at} \sin bt, \tag{1}$$

cu $\lambda = a + ib$ rădăcină caracteristică şi $h = 0, 1, 2, \ldots, m_\lambda - 1$, unde m_λ este ordinul de multiplicitate al lui λ în ecuaţia caracteristică. Mai mult, observăm că şi derivatele soluţiilor sunt combinaţii liniare de această formă.

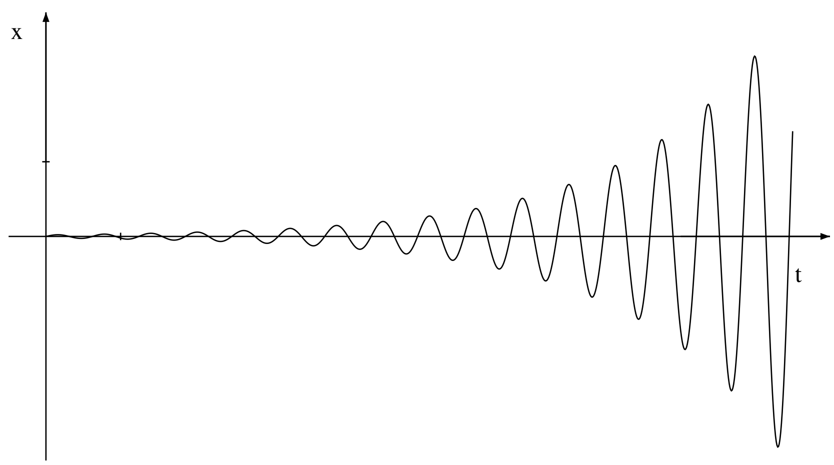

Fig. 1: Graficul funcţiei $\varphi(t) = e^{\frac{1}{2}t} \sin 10t$

Analizând graficele funcţiilor de forma (1) pe intervalul $[\,0, +\infty)$, observăm imediat următoarele

(i) dacă $a = \operatorname{Re}\lambda > 0$, atunci φ este nemărginită pentru $t \to +\infty$;

(ii) dacă $a = \operatorname{Re}\lambda < 0$ atunci, şi numai atunci, φ şi derivatele sale au limita zero pentru $t \to +\infty$.

(iii) dacă $a = 0$ şi $h = 0$, atunci φ şi derivatele sale sunt mărginite pe $[\,0, +\infty)$;

(iv) dacă $a = 0$ şi $h > 0$, atunci φ este nemărginită pentru $t \to +\infty$;

Ţinând cont de aceste observaţii, obţinem următorul *criteriu de stabilitate* pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

Teoremă. *Fie* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ *rădăcinile polinomului caracteristic*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

asociat ecuaţiei (E.L.O*)*, având multiplicităţile* $m_1, m_2, \ldots, m_s$*. Atunci*

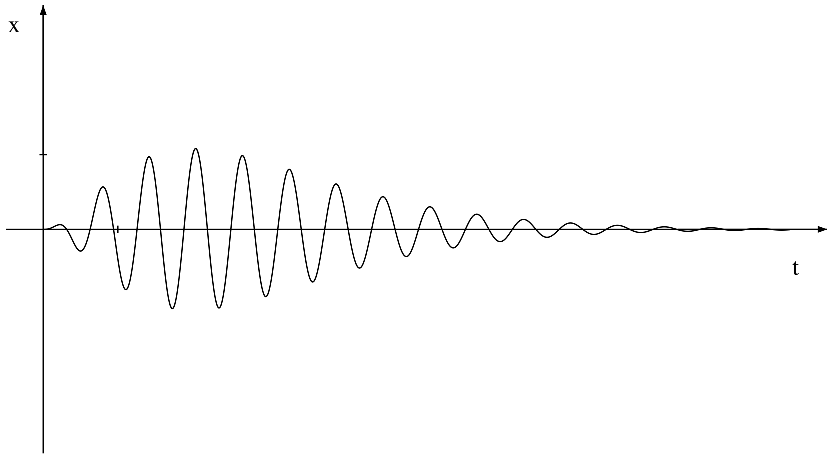

Fig. 2: Graficul funcţiei $\varphi(t) = t^2 e^{-t} \sin 10t$

(*i*) *dacă* $\forall\, i$, $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, *atunci ecuaţia* (E.L.O*) *este asimptotic stabilă*;

(*ii*) *dacă* $\exists\, i_0$ *cu* $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} > 0$, *atunci ecuaţia* (E.L.O*) *este instabilă*;

Dacă $\forall\, i$, $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ *şi* $\exists i_0$ *cu* $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} = 0$ *atunci sunt posibile numai următoarele două situaţii:*

(*iii*) *dacă* $\operatorname{Re} \lambda_i = 0 \Rightarrow m_i = 1$ *atunci ecuaţia* (E.L.O*) *este stabilă*;

(*iv*) *dacă* $\exists\, i_0$ *cu* $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} = 0$ *şi* $m_{i_0} \geq 2$ *atunci ecuaţia* (E.L.O*) *este instabilă.*

Demonstraţie. Fie $y = y_1(t)$, $y = y_2(t)$, $\ldots$, $y = y_n(t)$, cele n soluţii de forma (1) date de Teorema de generare a unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (E.L.O*), şi fie

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

matricea asociată acestui sistem de soluţii. Ştim că prin transformarea

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \ldots,\ x_n = y^{(n-1)},$$

ea devine o matrice fundamentală a sistemului liniar ataşat (S.L.O*), şi astfel stabilitatea ecuaţiei (E.L.O*) este caracterizată de comportarea matricei fundamentale $Y = Y(t)$.

Este clar că, în cazul (*i*) avem

$$\lim_{t \to +\infty} \|Y(t)\| = 0,$$

în cazul (iii) matricea $Y = Y(t)$ este marginită pe $[0, +\infty)$, iar în cazurile (ii) şi (iv) este nemărginită pe orice interval de forma $[a, +\infty)$, cu $a \geq 0$, de unde urmează concluzia.

Exemplul 1. Ecuaţia
$$y''' + y'' + y' + y = 0,$$
este stabilă, fără să fie asimptotic stabilă, deoarece ecuaţia caracteristică
$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$
are soluţiile $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_{2,3} = \pm i$ şi se aplică punctul (iii) al criteriului.

Exemplul 2. Ecuaţia
$$y'' = 0, \tag{2}$$
este instabilă deoarece ecuaţia ei caracteristică
$$\lambda^2 = 0,$$
are soluţia dublă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ şi se aplică punctul (iv) al criteriului. Aceeaşi concluzie se poate trage direct din forma soluţiei generale:
$$y_{SGO} = c_1 + c_2 t.$$

Observaţie. Spre deosebire de cazul sistemelor liniare, stabilitatea unei ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi poate fi decisă numai de rădăcinile caracteristice şi multiplicităţile lor.

De exemplu, sistemul liniar
$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0, \end{cases}$$
are aceeaşi ecuaţie caracteristică, $\lambda^2 = 0$, cu ecuaţia (2) dar, spre deosebire de aceasta, el este stabil: este suficient să constatăm că soluţia sa generală este
$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2. \end{cases}$$
Sistemul este în cazul $(3°b)$ al criteriului de stabilitate pentru sisteme liniare iar toate celulele Jordan asociate rădăcinii caracteristice $\lambda = 0$ au ordinul întâi, forma canonică Jordan fiind chiar matricea nulă.

Pe de altă parte, sistemul asociat ecuaţiei (2) are forma
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 0, \end{cases}$$
şi este instabil, aşa cum era de aşteptat. Intr-adevăr, sistemul are soluţia generală
$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 t \\ x_2 = c_2, \end{cases}$$

nemărginită pentru orice $c_2 \neq 0$.

§5. Stabilitatea sistemelor liniare pertubate. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice constantă. Considerăm sistemul

$$x' = Ax + F(t, x), \tag{S.L.P}$$

obţinut prin *perturbarea* sistemului liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$x' = Ax, \tag{S.L.O}$$

cu o *funcţie perturbatoare* $F : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe mulţimea deschisă Ω. Presupunem că (S.L.P) admite soluţia nulă, adică $0 \in \Omega$ şi $F(t, 0) = 0$ pentru $t \geq 0$, şi suntem interesaţi să vedem în ce condiţii soluţia nulă a sistemului neperturbat, presupusă stabilă, rămâne stabilă şi pentru sistemul perturbat.

Vom presupune, în plus, că există $r > 0$ şi $L \geq 0$ astfel încât $B(0, r) \subset \Omega$ şi

$$\|F(t, x)\| \leq L\|x\| \tag{3}$$

pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B(0, r)$, şi vom măsura "mărimea" perturbaţiei F prin valoarea constantei Lipschitz L.

Dacă soluţia nulă a sistemului (S.L.O) este numai simplu stabilă, atunci perturbaţii oricât de mici pot face ca ea să devină instabilă. De exemplu, soluţia nulă a ecuaţiei scalare

$$x' = 0$$

este simplu stabilă, chiar uniform stabilă, în timp ce soluţia nulă a ecuaţiei perturbate

$$x' = \varepsilon x$$

este instabilă pentru orice $\varepsilon > 0$, oricât de mic.

Din acest motiv, în continuare, vom considera că sistemul liniar omogen (S.L.O) este asimptotic stabil, altfel spus vom considera că A este matrice hurwitziană. Amintim că, în acest caz, există $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t} \tag{4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 1. (Poincaré-Liapunov) *În ipotezele precizate, dacă constanta Lipshitz L este suficient de mică, mai precis dacă*

$$L < \frac{\omega}{M}, \tag{5}$$

atunci soluţia nulă a sistemului (S.L.P) *este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. Definim submulţimea deschisă $\Omega_0 = \{\xi \in \Omega \text{ cu } \|\xi\| < r\} \subset \Omega$, notăm $f(t, x) = Ax + F(t, x)$ şi, pentru $a \in \mathbb{R}_+$ şi $\xi \in \Omega_0$ fixaţi arbitrar, notăm cu $x(t) = x(t, a, \xi)$ soluţia saturată a problemei Cauchy $\mathcal{PC}(\mathbb{R}_+, \Omega_0, f, a, \xi)$ definită pe un intervalul maximal $[\,a, T)$.

Din formula variaţiei constantelor avem

$$x(t,a,\xi) = e^{(t-a)A}\xi + \int_a^t e^{(t-s)A} F(s, x(s,a,\xi))\, ds,$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$. Urmează, ţinând cont de (3) şi (4),

$$\begin{aligned}\|x(t,a,\xi)\| &\le \|e^{(t-a)A}\|\|\xi\| + \int_a^t \|e^{(t-s)A}\|\|F(s,x(s,a,\xi))\|\, ds\\ &\le Me^{-\omega(t-a)}\|\xi\| + \int_a^t LMe^{-\omega(t-s)}\|x(s,a,\xi)\|\, ds,\end{aligned}$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$. Amplificăm cu $e^{\omega t} > 0$ şi, notând $u(t) = e^{\omega t}\|x(t,a,\xi)\|$, obţinem

$$u(t) \le Me^{\omega a}\|\xi\| + \int_a^t LMu(s)\, ds$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$. Din Lema lui Gronwall obţinem

$$u(t) \le Me^{\omega a}\|\xi\| e^{LM(t-a)}$$

de unde deducem

$$\|x(t,a,\xi)\| \le M\|\xi\| e^{(LM-\omega)(t-a)} \tag{6}$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$. Să observăm că din (6) urmează, ţinând cont de (5),

$$\|x(t,a,\xi)\| \le M\|\xi\|,$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$ şi astfel,

$$\|x(t,a,\xi)\| \le \frac{r}{2},$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$, dacă $\|\xi\| \le \frac{r}{2M} \overset{\text{def}}{=} \eta$.

Dacă am presupune că $T < +\infty$, ar rezulta că graficul soluţiei $x(\cdot, a, \xi)$ este inclus în compactul $[\,a, T\,] \times B(0, r/2) \subset [\,0, +\infty) \times \Omega_0$ şi atunci soluţia ar fi continuabilă, dar ea este saturată, prin urmare $T = +\infty$.

Mai departe, deoarece

$$LM - \omega < 0,$$

din inegalitatea (6) rezultă că, pentru orice $\xi \in \Omega_0$ cu $\|\xi\| \le \eta$, avem

$$\lim_{t-a\to+\infty} x(t,a,\xi) = 0,$$

de unde urmează că soluţia nulă a sistemului perturbat este uniform asimptotic stabilă.

Teorema 2. *Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice hurwitziană şi $F : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω. Dacă există $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$\|F(t,x)\| \le \alpha(\|x\|)$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, şi

$$\lim_{\rho\searrow 0} \frac{\alpha(\rho)}{\rho} = 0, \tag{7}$$

atunci soluţia nulă a sistemului (S.L.P) *este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. Matricea fiind A hurwitziană, există $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât are loc (4). Fixăm $L = \frac{\omega}{2M} > 0$ şi astfel are loc relaţia (5).

Din (7) rezultă că există $r > 0$ astfel încât

$$\alpha(\rho) \leq L\rho$$

pentru orice $\rho \in [0, r]$. Evident că $r > 0$ poate fi ales suficient de mic astfel încât $B(0, r) \subset \Omega$, suntem astfel în ipotezele Teoremei Poincaré-Liapunov şi demonstraţia este încheiată.

§6. Metoda primei aproximaţii. Considerăm sistemul diferenţial autonom

$$x' = f(x) \tag{8}$$

unde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Amintim că $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ înseamnă că toate derivatele parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ există şi sunt continue pe Ω. În acest caz, f este diferenţiabilă în orice punct $\xi \in \Omega$, iar diferenţiala sa într-un punct ξ, $df(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, care este un operator liniar, are ca matrice asociată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ exact matricea jacobiană

$$J_f(\xi) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right).$$

Din definiţia diferenţiabilităţii, aceasta înseamnă că

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{\|y\|} [f(\xi + y) - f(\xi) - J_f(\xi)y] = 0,$$

şi astfel, dacă notăm

$$F(y) = f(\xi + y) - f(\xi) - J_f(\xi)y \tag{9}$$

avem

$$f(\xi + y) = f(\xi) + J_f(\xi)y + F(y) \tag{10}$$

cu

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{\|y\|} F(y) = 0. \tag{11}$$

Considerăm acum $\xi_0 \in \Omega$ un *punct staţionar* pentru câmpul vectorial f, adică un punct ξ_0 în care $f(\xi_0) = 0$, şi dorim să studiem, pentru sistemul diferenţial (8), stabilitatea *soluţiei staţionare* corespunzătoare: $\varphi(t) = \xi_0$ pentru orice $t \geq 0$.

Schimbarea de variabilă $y = x - \varphi(t)$ devine, în acest caz, $y = x - \xi_0$ şi conduce la sistemul

$$y' = f(\xi_0 + y)$$

care, evident, admite soluţia nulă $y = 0$.

Notăm $A = J_f(\xi_0)$ şi atunci din (10), ţinând cont că $f(\xi_0) = 0$, obţinem

$$f(\xi_0 + y) = Ay + F(y),$$

deci studiul stabilităţii soluţiei staţionare $x = \xi_0$ a sistemului neliniar autonom (8) s-a redus la studiul stabilităţii soluţiei nule pentru sistemul liniar perturbat

$$y' = Ay + F(y), \tag{12}$$

cu $A = J_f(\xi_0)$.

Teorema 3. (Metoda primei aproximaţii.) *Fie* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie de clasă* C^1 *pe mulţimea deschisă* Ω, *şi fie* $\xi_0 \in \Omega$ *astfel încât* $f(\xi_0) = 0$. *Dacă matricea jacobiană* $A = J_f(\xi_0)$ *este hurwitziană, atunci soluţia staţionară* $x = \xi_0$ *a sistemului* (8) *este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. Fie $r_0 > 0$ astfel încât $B(\xi_0, r_0) \subset \Omega$. După cum am arătat, soluţia $x = \xi_0$ a sistemului (8) este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă soluţia nulă a sistemului liniar perturbat (12) este asimptotic stabilă, unde $A = J_f(\xi_0)$ şi $F : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$, cu $\Omega_0 = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|y\| < r_0\}$, este dată de (9).

Definim, pentru orice $\rho \in [\,0, r)$,

$$\alpha(\rho) = \sup_{\|y\| \le \rho} \|F(y)\| \tag{13}$$

şi astfel avem

$$\|F(y)\| \le \alpha(\|y\|)$$

pentru orice $y \in \Omega_0$.

Din (11) urmează că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $r_\varepsilon > 0$ astfel încât $\|y\| < r_\varepsilon$ implică $\|F(y)\| < \varepsilon \|y\|$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar şi fie $\rho > 0$ astfel încât $\rho < r_\varepsilon$. Atunci, pentru orice y cu $\|y\| \le \rho$, avem că $\|F(y)\| < \varepsilon \|y\| < \varepsilon \rho$, de unde, trecând la supremum, obţinem

$$\alpha(\rho) = \sup_{\|y\| \le \rho} \|F(y)\| \le \varepsilon \rho,$$

pentru orice $\rho > 0$ cu $\rho < r_\varepsilon$. Am arătat astfel că

$$\lim_{\rho \searrow 0} \frac{\alpha(\rho)}{\rho} = 0$$

şi, prin urmare, este aplicabilă Teorema 2, de unde concluzia.

Observaţie. În cazul în care matricea $A = J_f(\xi_0)$ are o rădăcină caracteristică cu partea reală strict pozitivă, se poate arăta că, dacă funcţia α dată de (13) satisface o majorare de forma

$$\alpha(\rho) \le M \rho^\gamma,$$

cu $\gamma > 1$, atunci soluţia staţionară $x = \xi_0$ este instabilă. Acest criteriu este aplicabil, de exemplu, dacă f este de clasă C^2 pe Ω, caz în care $\gamma = 2$.

Dacă toate rădăcinile caracteristice au partea reală nenegativă şi există măcar una cu partea reală nulă, atunci metoda primei aproximaţii nu este aplicabilă, suntem într-un *caz de dubiu.*

Exemplu. Să se studieze stabilitatea soluţiilor staţionare ale sistemului

$$\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 - y. \end{cases} \tag{14}$$

Rezolvare. Soluţiile staţionare, adică soluţiile de forma

$$\begin{cases} x(t) = \text{const.} = x_0 \\ y(t) = \text{const.} = y_0 \end{cases}$$

au derivatele nule, deci x_0 şi y_0 verifică sistemul algebric

$$\begin{cases} 0 = y_0^2 - x_0 \\ 0 = x_0^2 - y_0, \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim două soluţii staţionare

$$\begin{cases} x_0^1 = 0 \\ y_0^1 = 0 \end{cases} \text{şi} \begin{cases} x_0^2 = 1 \\ y_0^2 = 1. \end{cases}$$

Sistemul (14) este un sistem diferenţial autonom de forma

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y), \end{cases}$$

cu $f(x,y) = y^2 - x$ şi $g(x,y) = x^2 - y$, prin urmare matricea jacobiană ataşată este

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

Studiem stabilitatea soluţiei staţionare $(x_0^1, y_0^1) = (0,0)$, soluţia nulă. Avem

$$A = J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2.$$

Rădăcinile caracteristice sunt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0,$$

deci soluţia nulă a sistemului (14) este asimptotic stabilă.

Pentru punctul staţionar $(x_0^2, y_0^2) = (1,1)$ avem

$$A = J(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Rădăcinile caracteristice sunt

$$\lambda_1 = -3 < 0,$$

şi

$$\lambda_2 = 1 > 0,$$

de unde rezultă că soluţia staţionară $x(t) = 1$, $y(t) = 1$ este instabilă.