

Cursul 12

(plan de curs)

Integrale prime

§1 Sisteme diferențiale autonome. Spațiul fazelor. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 . Vom considera sistemul diferențial

$$x' = f(x), \quad (1)$$

care se numește *autonom* deoarece câmpul vitezelor f nu depinde de t .

Acest sistem trebuie înțeles ca fiind sistemul

$$x' = \tilde{f}(t, x)$$

cu $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită de $\tilde{f}(t, x) = f(x)$ pentru $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Este clar că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $\xi \in \Omega$ sistemul (1) admite o unică soluție saturată $x : I_{a, \xi} \rightarrow \mathbb{R}^n$ care satisface condiția $x(a) = \xi$, soluție notată cu $x = x(t, a, \xi)$.

Propoziția 1. *Mulțimea soluțiilor sistemului (1) este închisă la translații în raport cu t .*

Demonstrație. Fie $x = \varphi(t)$ o soluție definită pe un interval $I = (\alpha, \beta)$ și fie τ un număr real oarecare. Arătăm că $\psi(t) = \varphi(t + \tau)$ este o soluție definită pe $I_\tau = (\alpha - \tau, \beta - \tau)$. Într-adevăr

$$\psi'(t) = \varphi'(t + \tau) = f(\varphi(t + \tau)) = f(\psi(t)),$$

pentru orice $t \in I_\tau$.

Definiție. Prin *traietorie* sau *orbită* a sistemului (1) înțelegem imaginea unei soluții oarecare:

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(t), t \in I_\varphi\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Observație. Traietoria unei soluții constante este formată dintr-un singur punct, numit *punct staționar* sau *punct de echilibru*. Punctul $\xi \in \Omega$ este staționar dacă și numai dacă $f(\xi) = 0$.

Observație. Este evident că două soluții care se obțin una din alta printr-o translație în raport cu t au aceeași traietorie.

Propoziția 2. *Prin orice punct $\xi \in \Omega$ trece o traietorie și numai una.*

Demonstrație. Fie $\xi \in \Omega$ și $\varphi(t) = x(t, 0, \xi)$ soluția care la momentul inițial $a = 0$ pleacă din ξ . Arătăm că $\text{Im}(\varphi)$ este singura traietorie prin ξ . Fie $\text{Im}(\psi)$ o traietorie oarecare prin ξ , aceasta înseamnă că $x = \psi(t)$ este o soluție care la un moment dat $t = a$ trece prin ξ , altfel spus $\psi(t) = x(t, a, \xi)$. În acest caz $\psi(t) = \varphi(t - a)$ deoarece ambele sunt soluții pentru aceeași problemă Cauchy. Am arătat că φ și ψ se obțin una din alta printr-o translație în raport cu t , prin urmare au aceeași traietorie.

Atragem atenția că această proprietate este specifică sistemelor autonome și ne permite să vorbim despre “traectoria punctului $\xi \in \Omega$ ” ca fiind traiectoria oricărei soluții care trece prin ξ . În cazul neautonom este posibil ca două soluții care trec la momente diferite prin același punct $\xi \in \mathbb{R}^n$ să aibă traiectorii diferite. De exemplu, pentru sistemul neautonom

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t, \end{cases}$$

soluția care trece prin origine la momentul $t = 0$ este

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

și are ca traiectorie parabola $y = x^2$, iar soluția care trece prin origine la momentul $t = 1$ este

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 1, \end{cases}$$

și are ca traiectorie parabola $y = x^2 + 2x$, diferită de cea precedentă.

În cazul sistemelor autonome, deoarece toate soluțiile care trec printr-un punct dat au aceeași traiectorie, se preferă interpretarea soluțiilor ca fiind *legi orare* care descriu mișcarea unui punct în submulțimea Ω a spațiului \mathbb{R}^n , numit din acest motiv *spațiul stărilor* sau *spațiul fazelor* sistemului. De altfel, este ușor de văzut că are loc

Propoziția 3. *Traectoria oricărui punct netaționar $\xi \in \Omega$ este o curbă regulată de clasă C^1 , adică o curbă ce admite o parametrizare $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, cu φ de clasă C^1 și $\varphi'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$.*

Traectoriile punctelor netaționare sunt curbe care admit tangentă în orice punct, spre deosebire de cazul neautonom, când această proprietate nu are loc. De exemplu, este ușor de văzut că funcția $t \in \mathbb{R} \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dată de ecuațiile

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

este o funcție de clasă C^1 care verifică sistemul diferențial neautonom

$$\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 2t, \end{cases}$$

iar traiectoria sa, dată de ecuația $y = \sqrt[3]{x^2}$, nu admite tangentă în punctul $(0, 0)$, unde graficul funcției $x \rightarrow \sqrt[3]{x^2}$ are un *punct de întoarcere*.

Mai mult, traiectoria oricărui punct netaționar $\xi \in \Omega$ al unui sistem autonom este parcursă numai într-un singur sens de către orice soluție care trece prin ξ , schimbarea sensului de parcurs implicând existența pe traiectorie a unui punct în care vectorul viteză se anulează, adică a unui punct staționar, fapt imposibil.

În final precizăm că familia traiectoriilor unui sistem diferențial autonom formează *portretul fazelor* sistemului.

§2 Integrale prime pentru sisteme autonome. Să analizăm un exemplu. Considerăm sistemul autonom

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = x_3 - x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases} \quad (2)$$

și îi adunăm ecuațiile. Obținem

$$x_1' + x_2' + x_3' = 0,$$

de unde, *prin integrare*, deducem că

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = c \text{ (const.)}, \quad (3)$$

pentru orice soluție a sistemului. Am obținut o primă relație integrală constantă a sistemului. De aici se poate continua rezolvarea astfel: din (3) îl explicităm pe x_1 în funcție de x_2 și x_3 și îl înlocuim în ultimile două ecuații, obținem astfel un sistem diferențial autonom numai în x_2 și x_3 . Pentru acest sistem căutăm iarăși o integrală constantă și, dacă o găsim, reducem sistemul la o singură ecuație diferențială. Deoarece la fiecare etapă prima relație integrală constantă găsită permite reducerea dimensiunii sistemului cu o unitate, aceste relații au fost numite *integrale prime*. În general o astfel de relație are forma

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \text{ (const.)},$$

și, prin extensie, chiar aplicația $U : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este numită *integrală primă*.

Revenind la exemplul dat, am stabilit așadar că aplicația $U_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definită de relația

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

este o integrală primă a sistemului, deoarece este constantă pe traiectorii.

Amplificăm acum prima ecuație a sistemului cu x_1 , a doua cu x_2 și a treia cu x_3 și le adunăm. Rezultă

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = 0,$$

de unde obținem a doua integrală primă:

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c \text{ (const.)} \quad (4)$$

Încercăm acum să schițăm portretul fazelor, adică să determinăm traiectoriile sistemului.

Punctele staționare sunt date de sistemul algebric liniar omogen

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

care este compatibil nedeterminat cu soluțiile de forma $x = (x_1, x_2, x_3) = (\lambda, \lambda, \lambda)$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Să alegem un punct nestaționar $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, de exemplu $\xi = (0, 0, 2)$. Notăm cu $x = x(t)$ soluția care la momentul $t = 0$ trece prin ξ . Din relația (3) deducem

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 0 + 0 + 2 = 2,$$

pentru orice t , iar din (4)

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4,$$

pentru orice t . Deducem de aici că traiectoria acestei soluții se află pe curba de intersecție dintre planul

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

și sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,$$

care este un cerc. Acest cerc este parcurs în întregime deoarece are lungime finită și în vecinătatea lui vectorul viteză este nenul, având prin urmare un minim strict pozitiv. Deducem de aici că mișcarea punctului curent pe traiectorie este periodică.

Este ușor de văzut că toate celelalte traiectorii nestaționare sunt cercuri aflate în plane perpendiculare pe dreapta de ecuație $x = \lambda(1, 1, 1)$, centrate în punctul de intersecție dintre planul cercului și această dreaptă.

Începem acum studiul sistemului autonom oarecare

$$x' = f(x), \tag{5}$$

cu $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definiția 1 Fie $\Omega_0 \subset \Omega$ nevidă și deschisă. Aplicația $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *integrală primă* a sistemului (5) pe Ω_0 dacă

- (i) U este de clasă C^1 pe Ω_0 ;
- (ii) $\nabla U(\xi) = 0$ are numai zerouri izolate $\xi \in \Omega_0$;
- (iii) oricare ar fi o soluție $x : I \rightarrow \Omega_0$ a sistemului (5) există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$U(x(t)) = c$$

pentru orice $t \in I$.

Observație. În condiția (ii) am notat cu $\nabla U(\xi)$ *gradientul* câmpului scalar $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ calculat într-un punct $\xi \in \Omega_0$, adică vectorul

$$\nabla U(\xi) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial U}{\partial x_2}(\xi), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(\xi) \right).$$

Condiția (ii) asigură faptul că aplicația U nu este constantă pe nici o submulțime deschisă din Ω_0 .

Teorema 1. Fie $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 , neconstantă pe Ω_0 . Condiția necesară și suficientă pentru ca U să fi o integrală primă pentru (5) este ca

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(\xi) f_i(\xi) = 0 \quad (6)$$

pentru orice $\xi \in \Omega_0$.

Observație. Dacă notăm cu $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ produsul scalar uzual al vectorilor $u, v \in \mathbb{R}^n$, relația (6) se scrie sub forma

$$\langle \nabla U(\xi), f(\xi) \rangle = 0$$

și are următoarea interpretare geometrică remarcabilă: aplicația U este o integrală primă dacă și numai dacă vectorii $\nabla U(x)$ și $f(x)$ sunt ortogonali, pentru orice $x \in \Omega_0$.

Mai mult, ținând cont că într-un punct $\xi \in \Omega_0$ în care $\nabla U(\xi) \neq 0$ ecuația $U(x) = c = U(\xi)$ definește local o hipersuprafață de clasă C^1 pentru care normala în ξ are direcția dată de vectorul $\nabla U(\xi)$, obținem următoarea caracterizare: aplicația U este o integrală primă dacă și numai dacă în orice $\xi \in \Omega_0$ vectorul viteză $f(\xi)$ este tangent la hipersuprafața de nivel constant $U(x) = U(\xi)$.

Demonstrație. Fie $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și $x = x(t)$ o soluție oarecare a sistemului (5). Avem următoarea formulă de derivare:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U(x(t))) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) f_i(x(t)) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Necesitatea condiției (6). Fie U o integrală primă și fie $\xi \in \Omega_0$ fixat arbitrar. Considerăm $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ o soluție care trece la un moment dat $t = a$ prin ξ și, deoarece $U(x(t)) = \text{const.}$, avem

$$0 = \frac{d}{dt}(U(x(t))) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t)) \rangle,$$

pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$. De aici, pentru $t = a$, obținem relația (6).

Suficiența condiției (6). Fie $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 care satisface condiția (6) și fie $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ o soluție oarecare. Din

$$\frac{d}{dt}(U(x(t))) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t)) \rangle = 0$$

pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$ rezultă $U(x(t)) = \text{const.}$, și astfel demonstrația este încheiată.

Revenind la exemplul (2), pentru orice $c > 0$, suprafața de nivel constant c pentru integrala primă

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

este sfera de ecuație

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c.$$

Normala într-un punct $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ aflat pe sferă are direcția

$$\nabla U_2(\xi) = (2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3) = 2\xi,$$

adică direcția razei $O\xi$, așa cum ne așteptam, și este ortogonală pe vectorul viteză $f(\xi) = (\xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1, \xi_1 - \xi_2)$. Intr-adevăr

$$\langle \nabla U_2(\xi), f(\xi) \rangle = 2\xi_1(\xi_2 - \xi_3) + 2\xi_2(\xi_3 - \xi_1) + 2\xi_3(\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Încercăm acum să mai găsim o integrală primă pentru exemplul (2). Amplificând convenabil ecuațiile și adunând rezultatele obținem, de exemplu,

$$x_2x'_1 + x_1x'_2 + x_3x'_2 + x_2x'_3 + x_1x'_3 + x_3x'_1 = 0,$$

de unde deducem că și aplicația

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

este o integrală primă pentru (2). Observăm totuși că

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}U_1(x_1, x_2, x_3)^2 - U_2(x_1, x_2, x_3),$$

adică U_3 este de forma

$$U_3(x) = F(U_1(x), U_2(x)), \quad (7)$$

și se poate deduce direct din această relație că U_3 este constantă pe traiectoriile sistemului, deoarece atât U_1 cât și U_2 au această proprietate.

Este clar acum că sistemul (2) admite o infinitate de integrale prime de forma (7), dar acestea nu duc nici o informație nouă despre soluțiile sistemului.

Cum putem afla dacă există sau nu o *legătură funcțională* de forma (7) între trei aplicații U_1 , U_2 și U_3 oarecare? În cazul funcțiilor de clasă C^1 răspunsul este sugerat de următoarea observație: dacă are loc (7), atunci, pentru fiecare $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(U_1(x), U_2(x)) \frac{\partial U_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(U_1(x), U_2(x)) \frac{\partial U_2}{\partial x_i}(x)$$

adică

$$\nabla U_3(x) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(U_1(x), U_2(x)) \nabla U_1(x) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(U_1(x), U_2(x)) \nabla U_2(x).$$

Așadar, dacă $U_3(x) = F(U_1(x), U_2(x))$ pentru orice $x \in \Omega$, atunci vectorul $\nabla U_3(x)$ este o combinație liniară a vectorilor $\nabla U_1(x)$ și $\nabla U_2(x)$.

Suntem conduși la următoarea definiție:

Definiția 2 Aplicațiile $U_1, U_2, \dots, U_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numesc *funcțional independente* într-un punct $\xi \in \Omega$ dacă vectorii

$$\nabla U_1(\xi), \nabla U_2(\xi), \dots, \nabla U_k(\xi),$$

sunt liniar independenți sau, altfel spus, dacă

$$\text{rang} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\xi) \right)_{k \times n} = k.$$

Observație. Minorul care dă rangul matricei de mai sus este diferit de zero în ξ și, fiind o funcție continuă, el va fi diferit de zero pe o vecinătate a lui ξ , și astfel, dacă aplicațiile U_i sunt funcțional independente într-un punct ξ , ele vor fi funcțional independente pe o întreagă vecinătate a lui ξ .

Teorema 2. *În vecinătatea oricărui punct nestaționar al sistemului (5) există exact $n - 1$ integrale prime funcțional independente în acel punct.*

Demonstrație. Partea I, există cel mult $n - 1$ integrale prime funcțional independente. Fie $\xi \in \Omega$ astfel încât pe o vecinătate a sa să fie definite integralele prime U_1, U_2, \dots, U_n , funcțional independente în ξ . În acest caz sistemul de n vectori

$$\nabla U_1(\xi), \nabla U_2(\xi), \dots, \nabla U_n(\xi),$$

este liniar independent și, prin urmare, formează o bază în \mathbb{R}^n .

Deoarece U_1, U_2, \dots, U_n sunt integrale prime, din Teorema 1 urmează că vectorul $f(\xi)$ este ortogonal pe fiecare vector din această bază și, prin urmare, este vectorul nul, adică ξ este un punct staționar.

Am arătat că în vecinătatea unui punct nestaționar există cel mult $n - 1$ integrale prime funcțional independente în acel punct.

Partea a II-a, există $n - 1$ integrale prime funcțional independente. Fără demonstrație!

Teorema 3. *Fie $\xi \in \Omega$ un punct nestaționar și fie U_1, U_2, \dots, U_{n-1} un sistem de $n - 1$ integrale prime funcțional independente în ξ . Atunci, oricare altă integrală primă V a sistemului (5) definită în vecinătatea lui ξ are forma*

$$V(x) = F(U_1(x), U_2(x), \dots, U_{n-1}(x)), \quad (8)$$

cu F o funcție de clasă C^1 definită pe o vecinătate din spațiul \mathbb{R}^{n-1} a punctului $(U_1(\xi), U_2(\xi), \dots, U_{n-1}(\xi))$.

Demonstrație. Etapa I, forma soluției. Fie V și U_1, U_2, \dots, U_{n-1} cele n integrale prime din ipoteza teoremei. Presupunem că există F astfel încât are loc relația (8) și dorim să aflăm forma acestei funcții. Dacă transformarea

$$\begin{cases} y_1 = U_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = U_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_{n-1} = U_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (9)$$

ar fi inversabilă,

$$y = \tilde{U}(x) \Leftrightarrow x = \tilde{W}(y)$$

atunci din (8) ar rezulta următoarea formă pentru funcția F :

$$F(y) = V(\tilde{W}(y)).$$

Dificultatea constă în faptul că inversa transformării (9), dacă există, nu poate fi de clasă C^1 , pentru că în acest caz transformarea ar fi un difeomorfism de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R}^{n-1} , iar difeomorfismele păstrează dimensiunea spațiilor de lucru.

Vom completa transformarea (9) cu încă o ecuație de forma

$$y_n = U_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

astfel încât transformarea obținută să devină un difeomorfism de clasă C^1 pe o vecinătate a lui ξ . Acest lucru este todeauna posibil în ipotezele teoremei, deoarece U_1, U_2, \dots, U_{n-1} sunt funcțional independente în ξ , și prin urmare

$$\text{rang} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}(\xi) \right)_{(n-1) \times n} = n - 1.$$

Renumerotând eventual variabilele x_i , putem presupune fără să restrângem generalitatea că minorul format din primele $n - 1$ coloane în matricea de mai sus este nenul. În acest caz, definim

$$U_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Cu această alegere matricea jacobiană a transformării complete este

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial U_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_n}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

și are, în mod evident, determinantul nenul în $x = \xi$. Aplicăm Teorema de inversare locală și obținem că, local, există aplicațiile W_1, W_2, \dots, W_n de clasă C^1 astfel încât să aibă loc echivalența

$$\begin{cases} y_1 = U_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = U_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = U_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = W_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 = W_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ x_n = W_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (10)$$

pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dintr-o vecinătate a lui ξ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dintr-o vecinătate a lui $\eta = U(\xi) = (U_1(\xi), U_2(\xi), \dots, U_n(\xi))$.

Definim, în sfârșit, funcția \tilde{F} de clasă C^1 prin

$$\tilde{F}(y) = V(W_1(y), W_2(y), \dots, W_n(y)) \quad (11)$$

și atunci avem egalitatea

$$V(x) = \tilde{F}(U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)) \quad (12)$$

pentru orice x dintr-o vecinătate a lui ξ .

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie \tilde{F} funcția definită de relația (11). Comparând relația (12) cu relația (8), observăm că pentru a încheia demonstrația teoremei mai trebuie să arătăm doar că $\tilde{F}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ nu depinde de ultimul argument, y_n . Mai precis, vom arăta că

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n} = 0.$$

Derivăm și obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n}(y) &= \frac{\partial}{\partial y_n} V(W_1(y), W_2(y), \dots, W_n(y)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y). \end{aligned}$$

Acum folosim faptul că integralele prime U_1, U_2, \dots, U_{n-1} sunt funcțional independente în ξ , deci funcțional independente în orice x dintr-o vecinătate a lui ξ . Din Teorema 2 rezultă că sistemul format din integralele prime U_1, U_2, \dots, U_{n-1} și V este funcțional dependent în orice x , deci vectorii

$$\nabla U_1(x), \nabla U_2(x), \dots, \nabla U_{n-1}(x), \nabla V(x),$$

sunt liniar dependenți iar primii $n - 1$ sunt liniar independenți. De aici urmează că există funcțiile α_j astfel încât

$$\nabla V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) \nabla U_j(x),$$

adică

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x)$$

pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, n$.

Revenim la derivarea lui \tilde{F} în raport cu y_n și avem mai departe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n}(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \right) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \frac{\partial y_j}{\partial y_n} = 0. \end{aligned}$$

Aici am folosit faptul că, din echivalența (10), avem

$$y_j = U_j(W_1(y), W_2(y), \dots, W_n(y))$$

pentru orice $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dintr-o mulțime deschisă, de unde, derivând în raport cu y_n obținem că

$$\frac{\partial y_j}{\partial y_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) = 0,$$

pentru fiecare $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Observație. Fie $\xi \in \Omega$ un punct nestaționar pentru sistemul (5) și fie U_1, U_2, \dots, U_{n-1} cele $n - 1$ integrale prime funcțional independente în ξ a căror existență este asigurată de Teorema 2. Considerând difeomorfismul (10) ca fiind o schimbare de variabile, sistemul inițial $x' = f(x)$ se transformă în sistemul $y' = g(y)$ de forma

$$\begin{cases} y'_1 = 0 \\ y'_2 = 0 \\ \dots \\ y'_{n-1} = 0 \\ y'_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

cu $g_n \neq 0$ pe o vecinătate a punctului $\eta = U(\xi)$. Acest sistem are soluția generală de forma

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 \\ \dots \\ y_{n-1} = c_{n-1} \\ y_n = G(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

iar familia traiectoriilor acestuia este un fascicol de segmente paralele cu axa Oy_n care trec prin toate punctele unei mulțimi deschise din hiperplanul de ecuație $y_n = \eta_n$.

În concluzie, în vecinătatea unui punct nestaționar, familia traiectoriilor poate fi *îndreptată* în mod continuu și neted, adică poate fi transformată printr-un difeomorfism de clasă C^1 într-o familie de segmente paralele.

Observație. Dacă se cunosc efectiv k integrale prime independente într-un $\xi \in \Omega$, fie acestea U_1, U_2, \dots, U_k , atunci pe o vecinătate a lui ξ dimensiunea sistemului poate fi redusă cu k unități.

Justificarea se bazează pe Teorema funcțiilor implicite: interpretăm cele k relații integrale constante ca fiind un sistem algebric,

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \\ U_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2 \\ \dots \\ U_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_k, \end{cases}$$

și, deoarece matricea jacobiană atașată are rangul k , cele k variabile corespunzătoare minorului care dă rangul pot fi explicitate în funcție de celelalte $n - k$ și astfel acestea fi eliminate din sistemul diferențial inițial.

Observație. Pentru ecuații diferențiale autonome de ordin n de forma

$$y^{(n)} = g(y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

noțiunea de integrală primă se definește prin intermediul sistemului de n ecuații de ordinul întâi obținut prin transformarea

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

și, prin urmare, aplicația $U : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *integrală primă* a ecuației date dacă este de clasă C^1 și, pentru orice soluție $y = y(t)$ a ecuației,

$$U(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) = \text{const.}$$

Exemplu. Să considerăm mișcarea unui punct material M de masă m , care la momentul t are poziția $x(t) \in \mathbb{R}^3$, supus unui câmp de forțe F care derivă dintr-un potențial, adică pentru care există un câmp scalar $U : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$F = -\nabla U(x).$$

În acest caz, din principiul forței stabilit de Newton, urmează că mișcarea lui M este descrisă de ecuația vectorială de ordinul doi

$$mx'' = -\nabla U(x), \quad (13)$$

care este echivalentă cu un sistem format din trei ecuații scalare de ordin doi și, în final, cu un sistem de șase ecuații scalare de ordinul întâi. Amplificăm ecuația (13) prin produs scalar cu x' și obținem

$$\begin{aligned} 0 &= m\langle x''(t), x'(t) \rangle + \langle \nabla U(x(t)), x'(t) \rangle = \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \langle x'(t), x'(t) \rangle + \frac{d}{dt} U(x(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m |x'(t)|^2 + U(x(t)) \right), \end{aligned}$$

și astfel găsim integrala primă

$$\frac{1}{2} m |x'(t)|^2 + U(x(t)) = \text{const.}$$

care arată că energia mecanică totală, egală cu suma dintre energia cinetică și energia potențială, se conservă pe timpul mișcării.