Cursul 13

(plan de curs)

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul înâi

§3. Integrale prime pentru sisteme neautonome. Vom extinde consideraţiile anterioare la cazul sistemelor neautonome de forma

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

cu $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1, prin reducerea acestora la cazul autonom.

Mai precis, în sistemul (1) considerăm că t este o funcţie de forma $t = t(s)$ şi mai adăugăm o ecuaţie care să admită ca soluţie funcţia identitate, $t(s) = s$. Obţinem următorul sistem diferenţial autonom în variabila s

$$\begin{cases} t' = 1 \\ x' = f(t, x), \end{cases} \tag{2}$$

unde acum cu $'$ este notată derivarea în raport cu s.

Arătăm că *graficele* soluţiilor sistemului (1) devin *traiectorii* pentru sistemul autonom (2) şi reciproc. Într-adevăr, dacă $x = \varphi(t)$ este o soluţie a sistemului (1) definită pentru $t \in (\alpha, \beta)$, atunci funcţia

$$\begin{cases} t = s, \\ x = \varphi(s) \end{cases}$$

verifică sistemul autonom (2), iar traiectoria ei

$$\{(s, \varphi(s)), s \in (\alpha, \beta)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

coincide cu graficul lui φ.

Reciproc, fie $\Gamma \subset I \times \Omega$ o traiectorie a sistemului (2) şi $(a, \xi) \in \Gamma$ un punct oarecare pe această traiectorie. Ştim că Γ este imaginea oricărei soluţii care trece prin (a, ξ). Considerăm soluţia $(t, x) = (t(s), x(s))$ care trece prin (a, ξ) chiar la momentul $s = a$. Din $t(a) = a$ şi $t'(s) = 1$ rezultă $t(s) = s$ pentru orice s, de unde urmează că funcţia $x = x(t)$ verifică sistemul (1), mai precis $x(t) = x(t, a, \xi)$, iar graficul ei este chiar submulţimea $\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Vom defini noţiunea de integrală primă pentru sistemul neautonom (1) astfel încât orice integrală primă a acestuia să devină integrală primă a sistemului autonom (2). Acest lucru este posibil deoarece în cazul autonom integralele prime sunt câmpuri scalare definite pe spaţiul fazelor, valorile lor depinzând numai de variabilele spaţiale, nu şi de variabila temporală.

Observaţie. Pentru o aplicaţie $U : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, vom nota cu ∇U gradientul lui U,

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right),$$

şi cu $\nabla_x U$ *gradientul spaţial* al lui U, adică

$$\nabla U_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n} \right).$$

Definiţia 1. Fie $D_0 \subset I \times \Omega$ nevidă şi deschisă. O funcţie $U : D_0 \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* a sistemului (1) pe D_0 dacă

(i) U este de clasă C^1 pe D_0 ;

(ii) $\nabla U(t,x) = 0$ are numai zerouri izolate $(t,x) \in D_0$;

(iii) oricare ar fi o soluţie $x : J \to \Omega$ a sistemului (1) cu $(t, x(t)) \in D_0$ pentru orice $t \in J$, există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $U(t, x(t)) = c$ pentru orice $t \in J$.

Următoarele rezultate sunt versiunile "neautonome" ale celor de la cazul autonom.

Teorema 1. *Fie $U : D_0 \subset I \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, neconstantă pe D_0. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca U să fi o integrală primă pentru sistemul* (1) *este*

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x) \frac{\partial U}{\partial x_i}(t,x) = 0 \tag{3}$$

pentru orice $(t,x) \in D_0$.

Observaţie. Condiţia (3) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + \langle \nabla_x U(t,x), f(t,x) \rangle = 0,$$

pentru orice $(t,x) \in D_0$.

Datorită formei sale particulare, sistemul (2) nu are puncte staţionare. Ca atare, avem

Teorema 2. *Pentru orice punct $(a, \xi) \in I \times \Omega$ există o vecinătate deschisă a sa pe care sunt definite exact n integrale prime funcţional independente ale sistemului* (1)*.*

Exemplu. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x' = txy^2 \\ y' = tx^2 y, \ x > 0, y > 0, \end{cases}$$

pe care îl scriem sub forma simetrică

$$\frac{dx}{txy^2} = \frac{dy}{tx^2 y} = dt. \tag{4}$$

Din prima egalitate obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

care integrată ne furnizează prima integrală primă:

$$x^2 - y^2 = c_1.$$

În ultima egalitate din (4) înlocuim x^2 cu $y^2 + c_1$ şi obţinem ecuaţia

$$\frac{dy}{y(y^2 + c_1)} = tdt,$$

care integrată conduce la relaţia

$$\ln y - \ln \sqrt{y^2 + c_1} = c_1 \frac{t^2}{2} + c_2.$$

Aici îl înlocuim pe c_1 cu $x^2 - y^2$ şi obţinem a doua integrală primă:

$$\ln y - \ln x - \frac{t^2}{2}(x^2 - y^2) = c_2,$$

definită pentru $x > 0, y > 0$.

Am obţinut prin acest calcul formal integralele prime

$$U_1(t, x, y) = x^2 - y^2$$

şi

$$U_2(t, x, y) = \ln y - \ln x - \frac{t^2}{2}(x^2 - y^2),$$

care, în mod evident, sunt funcţional independente. Se poate verifica acum, prin derivare, că aceste două funcţii sunt constante pe traiectoriile sistemului.

§4. Ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi. Forma generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi este

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0,$$

cu $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Prin soluţie înţelegem o funcţie $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 care verifică ecuaţia, adică

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$$

pentru orice $x \in D$.

Definiţia 2. O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară* este o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0, \tag{5}$$

unde $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt funcţii de clasă C^1 pe D, o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$.

Observaţie. Ecuaţia (5) este de fapt o ecuaţie liniară omogenă deoarece are proprietatea evidentă că orice combinaţie liniară a două soluţii formează o nouă soluţie a ecuaţiei. Mulţimea soluţiilor sale este un subspaţiu liniar în $C^1(D)$ care, spre deosebire de cazul sistemelor diferenţiale liniare, nu mai este de dimensiune finită.

Exemplu. Se observă imediat că ecuaţia

$$x_2 \frac{\partial u}{x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

admite soluţia $u_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. În acest caz, pentru orice $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, funcţia

$$u(x_1, x_2) = \Phi(u_0(x_1, x_2)) = \Phi(x_1^2 + x_2^2)$$

este şi ea o soluţie. Verificare:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \Phi'(x_1^2 + x_2^2) \cdot 2x_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \Phi'(x_1^2 + x_2^2) \cdot 2x_2,$$

$$x_2 \frac{\partial u}{x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \Phi'(x_1^2 + x_2^2)\,(x_2 \cdot 2x_1 - x_1 \cdot 2x_2) = 0.$$

În particular, pentru fiecare $n = 0, 1, 2, \ldots$, funcţiile $u_n = (x_1^2 + x_2^2)^n$ sunt soluţii, şi este uşor de văzut că ele sunt liniar independente ca elemente în spaţiul liniar $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Am arătat astfel că spaţiul liniar al soluţiilor ecuaţiei date nu are dimensiune finită.

Să observăm acum că, notând $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, ecuaţia liniară (5) poate fi scrisă sub forma

$$\langle f(x), \nabla u(x) \rangle = 0,$$

care exprimă o condiţie de ortogonalitate între gradientul funcţiei necunoscute $u = u(x)$ şi vectorul viteză f al sistemului diferenţial autonom

$$x' = f(x), \tag{6}$$

condiţie care caracterizează, după cu ştim, integralele prime ale acestui sistem. Prin urmare, funcţia $u = u(x)$ este o soluţie pentru (5) dacă şi numai dacă este o integrală primă a sistemului diferenţial (6), numit, din acest motiv, *sistemul caracteristic* ataşat ecuaţiei liniare cu derivate parţiale (5). Acest sistem este scris, de obicei, sub forma simetrică

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \tag{6'}$$

În concluzie, avem următorul rezultat:

Teorema 3. *Fie $\xi \in D$ un punct nestaţionar al sistemului caracteristic* (6)*, fie D_0 o vecinătate deschisă a lui ξ inclusă în D şi fie $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1} : D_0 \to \mathbb{R}$ integrale prime independente în ξ ale sistemului* (6)*. Atunci soluţia generală a ecuaţiei* (5) *pe mulţimea D_0 este dată de*

$$u(x) = F(U_1(x), U_2(x), \ldots, U_{n-1}(x))$$

pentru $x \in D_0$, unde F parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1 definite pe imaginea transformării $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}) : D_0 \to \mathbb{R}^{n-1}$ cu valori în $\mathbb{R}$.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x_2 - x_3)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_3 - x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 - x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

pe mulţimea punctelor nestaţionare. Sistemul caracteristic sub forma simetrică este

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_3} = \frac{dx_2}{x_3 - x_1} = \frac{dx_3}{x_1 - x_2}.$$

Avem $dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$ şi $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$. Ca atare funcţiile $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ şi respectiv prin $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sunt integrale prime pentru acest sistem. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma (x_1, x_2, x_3) cu $x_1 = x_2 = x_3$. Este uşor de constatat că integralele prime de mai sus sunt independente în vecinătatea oricărui punct nestaţionar. Ca atare, soluţia generală a ecuaţiei este

$$u(x_1, x_2, x_3) = F(x_1 + x_2 + x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

unde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1.

§5. Ecuaţii cvasi-liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi. Fie Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^{n+1}$ şi fie $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ cu $i = 1, 2, \ldots, n+1$, funcţii de clasă C^1.

Definiţia 3. O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi-liniară* este o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, z(x))\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = f_{n+1}(x, z(x)), \tag{7}$$

unde

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x, z) \neq 0$$

măcar pentru un $(x, z) \in \Omega$. O *soluţie* a acestei ecuaţii este o funcţie $z : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, cu D nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, astfel încât $(x, z(x)) \in \Omega$ pentru orice $x \in D$ şi z satisface (7) Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei (7) poartă numele de *soluţie generală*.

Vom reduce rezolvarea ecuaţiei cvasi-liniare (7) la rezolvarea unei ecuaţii liniare, căutând soluţiile sub forma implicită

$$u(x, z(x)) = 0.$$

În acest caz, din teorema de derivare a funcţiilor definite implicit, avem

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x, z(x))}{\dfrac{\partial u}{\partial z}(x, z(x))}$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$. Înlocuind $\partial z/\partial x_i$ în (7), după eliminarea numitorului obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, z)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, z) + f_{n+1}(x, z)\frac{\partial u}{\partial z}(x, z) = 0, \tag{8}$$

ecuaţie care este de tipul (5) cu funcţia necunoscută $u = u(x_1, \ldots, x_n, z)$. Din Teorema 3 deducem

Teorema 4. *Fie $(\xi, \zeta) \in \Omega$ un punct nestaţionar al sistemului caracteristic*

$$\begin{cases} x_i'(t) = f_i(x(t), z(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \\ z'(t) = f_{n+1}(x(t), z(t)) \end{cases} \tag{9}$$

ataşat ecuaţiei (8), fie Ω_0 o vecinătate deschisă a punctului (ξ, ζ) inclusă în Ω şi fie $U_1, U_2, \ldots, U_n : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ integrale prime independente în punctul (ξ, ζ) ale sistemului (9). Atunci soluţia generală a ecuaţiei (7) pe mulţimea Ω_0 este definită implicit de

$$F(U_1(x, z(x)), U_2(x, z(x)), \ldots, U_n(x, z(x))) = 0,$$

unde F parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1 definite pe imaginea transformării $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n) : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}$.

Observaţie. Fiind dată ecuaţia cvasiliniară (7), sistemul său caracteristic (9), scris sub formă simetrică, este

$$\frac{dx_1}{f_1(x, z)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x, z)} = \frac{dz}{f_{n+1}(x, z)}. \tag{9'}$$

Exemplu. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2 z\frac{\partial z}{\partial x} - xyz\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + y^2. \tag{10}$$

Rezolvare. Ataşăm sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x^2 z} = \frac{dy}{-xyz} = \frac{dz}{1 + y^2}.$$

Din prima egalitate obţinem integrala primă

$$xy = c_1,$$

care substituită în a doua egalitate conduce la o ecuaţie cu variabile separabile

$$\frac{dy}{-c_1 z} = \frac{dz}{1+y^2}.$$

Integrând această ecuaţie şi revenind în substituţia $c_1 = xy$, obţinem a doua integrală primă

$$y + \frac{y^3}{3} + \frac{xyz^2}{2} = c_2.$$

În concluzie, soluţia generală a ecuaţiei (10) este dată sub următoarea formă implicită

$$F(xy, y + \frac{y^3}{3} + \frac{xyz^2}{2}) = 0,$$

unde F este orice funcţie de clasă C^1 definită pe un domeniu convenabil ales.