Tema 1. Grafice de funcţii

Fie $x : I \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de un singur argument, definită pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, şi fie t_0 un punct fixat în I. Prin definiţie, *derivata în* t_0 a funcţiei x este limita *raportului incrementar*

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

dacă aceasta există, şi reprezintă *viteza instantanee* de variaţie a variabilei x în raport cu variabila t, calculată la momentul t_0.

Spunem că funcţia x este *derivabilă* pe I dacă ea admite derivată finită în orice punct $t_0 \in I$, caz în care corespondenţa $t_0 \mapsto x'(t_0)$ defineşte o nouă funcţie, $x' : I \to \mathbb{R}$, numită *derivata funcţiei* x.

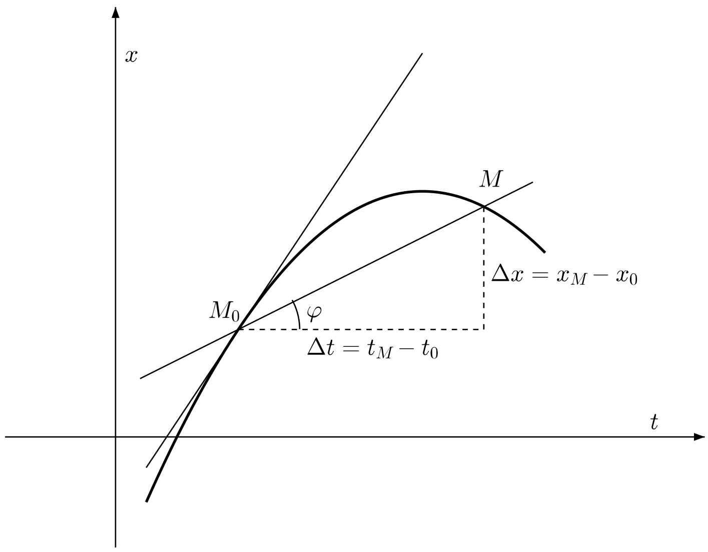

Figura 1: Tangenta la grafic

§1. Interpretarea geometrică a derivatei

În Figura 1 sunt considerate două puncte, $M_0(t_0, x_0)$ şi $M(t_M, x_M)$, pe graficul Γ al unei funcţii $x = x(t)$, $t \in I$. Observăm că raportul incrementar $\Delta x / \Delta t$ este egal cu panta secantei MM_0,

$$m_{MM_0} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_M - x_0}{t_M - t_0}.$$

Când M tinde la M_0, dreapta secantă M_0M tinde, prin definiţie, la tangenta la grafic în M_0, aceasta înseamnă că panta m_0 a tangentei este dată de limita pantelor m_{M_0M} când $t \to t_0$, adică

$$m_0 = \lim_{M \to M_0,\ M \in \Gamma} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t_M \to t_0} \frac{x_M - x_0}{t_M - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0).$$

În concluzie, graficul Γ al unei funcţii $x = x(t)$ admite tangentă într-un punct $M_0(t_0, x_0) \in \Gamma$ dacă şi numai dacă funcţia x are derivată în t_0. Panta tangentei este egală valoarea derivatei în t_0; dacă aceasta este infinită tangenta este verticală, altfel tagenta este dreapta de ecuaţie

$$x - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0).$$

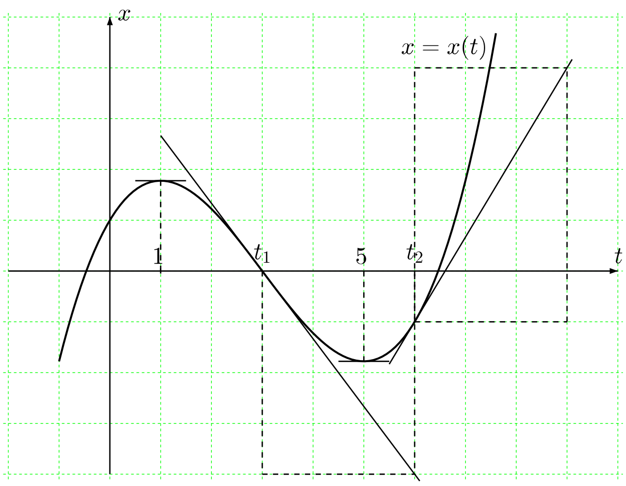

Figura 2: Tangenta la grafic

Exerciţiul 1.1. *În Figura 2 este desenat graficul unei funcţii derivabile* $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *şi sunt trasate tangentele la grafic în punctele corespunzătoare lui* $t_1 = 3$ *şi* $t_2 = 6$. *Folosind interpretarea geometrică a derivatei, estimaţi valorile derivatei în aceste două puncte. Verificaţi estimările făcute, ştiind că* $x = x(t)$ *este o funcţie polinomială de grad trei.*

Rezolvare. Estimăm pantele celor două tangente şi obţinem $x'(t_1) \approx -\frac{4}{3}$ şi $x'(t_2) \approx \frac{5}{3}$. Pentru verificare, observăm că în $t = 1$ şi $t = 5$ tangentele la grafic sunt orizontale, deci în aceste puncte derivata se anulează. Rezultă că x' are forma

$$x'(t) = a(t - 1)(t - 5) = a(t^2 - 6t + 5)$$

şi, prin urmare, funcţia $x = x(t)$ are forma

$$x(t) = a\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t\right) + b.$$

Din $x(0) = 1$ rezultă $b = 1$, iar din $x(3) = 0$ rezultă $a = \frac{1}{3}$. Am obţinut

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t + 3\right).$$

iar derivata $x'(t) = \frac{1}{3}(t^2 - 6t + 5)$ are în punctele $t_{1,2}$ exact valorile estimate.

Exerciţiul 1.2. *Să se determine punctele $A(a, x(a))$ şi $B(b, x(b))$, cu $a < b$, de pe graficul funcţiei*

$$x(t) = (t-1)^2,\ t \in \mathbb{R}$$

în care tangentele la grafic sunt perpendiculare între ele iar punctul lor de intersecţie este situat pe axa Ox.

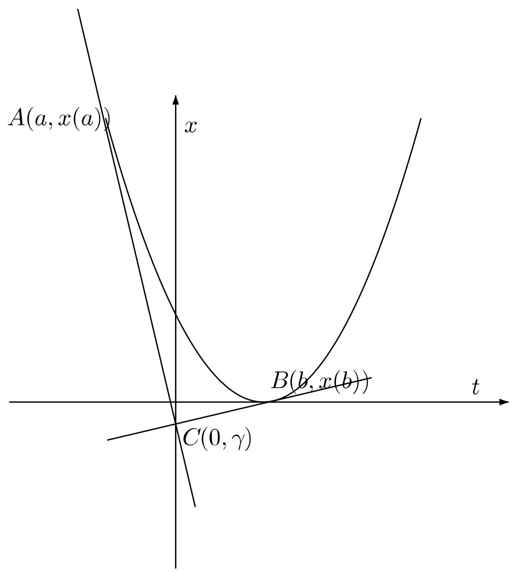

Figura 3: $x = (t-1)^2$

Rezolvare. Pantele tangentelor prin A şi B sunt $m_A = x'(a)$ şi $m_B = x'(b)$, iar aceste două drepte sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $m_A m_B = -1$. Obţinem relaţia

$$x'(a)x'(b) = -1 \ \Leftrightarrow 4(a-1)(b-1) = -1 \ \Leftrightarrow \ 4ab - 4(a+b) + 5 = 0.$$

Fie $M(\tau, x(\tau))$ un punct oarecare de pe grafic. Ecuaţia tangentei la grafic în M este

$$x - x(\tau) = x'(\tau)(t-\tau),$$

iar această dreaptă intersectează axa Ox în punctul punctul $C(0, \gamma(\tau))$, cu

$$\gamma(\tau) = x(\tau) - \tau x'(\tau) = (\tau-1)^2 - 2\tau(\tau-1) = 1 - \tau^2.$$

Tangentele prin A şi B se intersectează pe Ox dacă şi numai dacă

$$\gamma(a) = \gamma(b) \ \Leftrightarrow \ a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ a = -b,$$

deoarece $a \neq b$. In sfârşit, relaţia $4ab - 4(a+b) + 5 = 0$ conduce la $b^2 = \frac{5}{4}$ şi avem în final $a = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ şi $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exerciţiul 1.3. *Se dă funcţia*

$$x(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2},\ t \in (0,1).$$

Arătaţi că distanţa dintre punctul curent pe grafic şi punctul în care tangenta în punctul curent intersectează axa verticală este constantă.

Rezolvare. Cu notaţiile din exerciţiul precedent, se arată, prin derivare, că lungimea segmentului determinat de punctele $M(\tau, x(\tau))$ şi $C(0, \gamma(\tau))$ este constantă. Graficul acestei funcţii este o *tractrice.*

§2. Grafice de funcţii elementare

Prin *funcţie elementară* se înţelege o funcţie definită pe un interval sau pe o reuniune de intervale pentru care legea de corespondenţă $t \mapsto x(t)$ este dată de o expresie de calcul (una singură) în care intră un număr finit de operaţii cu funcţiile putere, exponenţiale, trigonometrice şi inversele acestora.

Domeniul maxim de definiţie al unei funcţii elementare este mulţimea acelor $t \in \mathbb{R}$ pentru care poate fi calculată valoarea funcţiei.

Funcţiile elementare sunt continue pe întreg domeniul maxim de definiţie, dar nu şi neapărat derivabile.

Derivabilitatea unei funcţii elementare se studiază calculând mai întâi *derivata formală*, obţinută prin aplicarea regulilor de derivare. În punctele în care derivata formală este bine definită funcţia este derivabilă, în celelalte derivabilitatea trebuie studită cu definiţia derivatei, adică prin trecere la limită în raportul incrementar.

Pentru reprezenarea grafică a unei funcţii elementare, atât timp cât nu se cere în mod expres stabilirea convexităţii funcţiei, studiul primei derivate este suficient.

Observaţie. Monotonia funcţiei rezultă din semnul derivatei întâi şi se stabileşte *pe fiecare interval* din domeniul său de definiţie. De exemplu, funcţia

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

are derivata,

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2},$$

strict negativă pe întregul domeniu $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, fără să fie descrescătoare pe $D_{\max}$, deorece, de exemplu, $x(-1) < x(+1)$. În schimb, funcţia este strict descrescătoare pe fiecare din cele două intervale care compun domeniul maxim de definiţie, $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$.

Exerciţiul 2.1. *Să se reprezinte grafic funcţia*

$$x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3t^2},\ t \in D_{\max},$$

unde $D_{\max} \subset \mathbb{R}$ este domeniul său maxim de definiţie.

Rezolvare. Avem $D_{\max} = \mathbb{R}$, $x(0) = 0$, funcţia se mai anulează în $t = 3$. Limtele funcţiei în capetele intervalului de definiţie sunt

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt[3]{t^3 - 3t^2} = +\infty,\ \lim_{t\to-\infty} \sqrt[3]{t^3 - 3t^2} = -\infty.$$

Dreapta $x = mt + n$ este asimptotă oblică pentru $t \to +\infty$, cu

$$m = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2}}{t} = 1$$

şi

$$n = \lim_{t\to+\infty} (\sqrt[3]{t^3 - 3t^2} - t) = \frac{t^3 - 3t^2 - t^3}{\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2)^2} + t\sqrt[3]{t^3 - 3t^2} + t^2} = -1.$$

Se observă că $x = t - 1$ este asimptotă şi pentru $t \to -\infty$.

Derivăm:

$$x'(t) = \frac{3t^2 - 6t}{3\sqrt[3]{(t^3 - 3t^2)^2}} = \frac{t(t-2)}{\sqrt[3]{t^4(t-3)^2}} = \frac{t-2}{\sqrt[3]{t(t-3)^2}}$$

Derivata formală x' nu este definită în $t_0 = 0$ şi $t_1 = 3$, aici vom aplica definiţia derivatei calculând limita raportului incrementar cu regula lui l'Hôpital. În $t_1 = 3$ avem

$$x'(3) = \lim_{t\to3} \frac{x(t) - x(3)}{t-3} = \lim_{t\to3} \frac{x'(t)}{1} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

deci funcţia nu este derivabilă în acest punct dar are derivată infinită, graficul are un *punct cu tangentă verticală crescătoare.*

În $t_0 = 0$ calculăm derivatele laterale

$$x'_s(0) = \lim_{t\nearrow0} \frac{x(t) - x(0)}{t-0} = \lim_{t\nearrow0} \frac{x'(t)}{1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty,$$

şi

$$x'_d(0) = \lim_{t\searrow0} \frac{x(t) - x(0)}{t-0} = \lim_{t\searrow0} \frac{x'(t)}{1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty,$$

deci nici în acest punct funcţia nu este derivabilă, nu are nici derivată, are derivate laterale infinite şi de semn contrar, graficul are un *punct de întoarcere.*

Derivata se anulează în $t = 2$, semnul derivatei este dat de semnul raportului $\frac{t-2}{t}$, deci *minus* între 0 şi 2, în rest *plus.*

Observăm că limitele din derivată,

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t-2}{\sqrt[3]{t(t-3)^2}} = 1$$

şi

$$\lim_{t\to-\infty} x'(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t-2}{\sqrt[3]{t(t-3)^2}} = 1,$$

sunt egale cu panta $m = 1$ a asimptotei, aşa cu era de aşteptat.

Nu se cere în mod explicit studiul convexităţii funcţiei, deci nu calculăm derivata a doua.

Avem următorul *tabel de variaţie*

t	$-\infty$		0	0		2		3	3		$+\infty$
x'	$+1$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$+1$
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

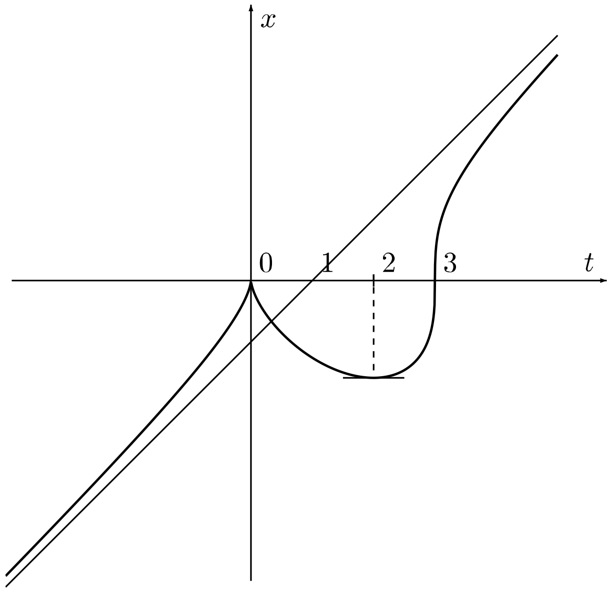

Figura 4: $x = \sqrt[3]{t^3 - 3t^2}$

Graficul este reprezentat în Figura 4 şi a fost trasat (punct cu punct) cu softul matematic Scilab, varianta gratuită a Matlab-ului[1].

Observaţie. Limitele derivatei calculate în capetele intervalelor care compun domeniul său de definiţie sunt foarte utile în stabilirea semnului derivatei, deoarece aceasta are proprietatea lui Darboux şi, prin urmare, pe intervalele în care nu se anulează are semn constant.

Exerciţiul 2.2. *Studiaţi şi reprezentaţi grafic următoarele funcţii elementare, considerate pe domeniile lor maxime de definiţie*:

a) $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2 - 1}$;

b) $x(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{t^3}{t^2 - 1}$;

c) $x(t) = \ln \dfrac{t^3}{t^2 - 1}$;

d) $x(t) = (t^2 - 3t + 2)\, e^{-t}$;

e) $x(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1}}{t - 1}$;

f) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3t}$.

[1] vezi `https://www.scilab.org/`

Exercițiul 2.3. *În Figura 5 a fost trasat (cu Geogebra[2]) graficul funcției*

$$x(t) = \arcsin \frac{2t}{t^2+1}, \;\; t \in D_{max} \subset \mathbb{R}.$$

Studiați funcția și determinați mărimea unghiului dintre tangentele laterale în cele două puncte unghiulare, $A(-1, -\frac{\pi}{2})$ *și* $B(1, \frac{\pi}{2})$.

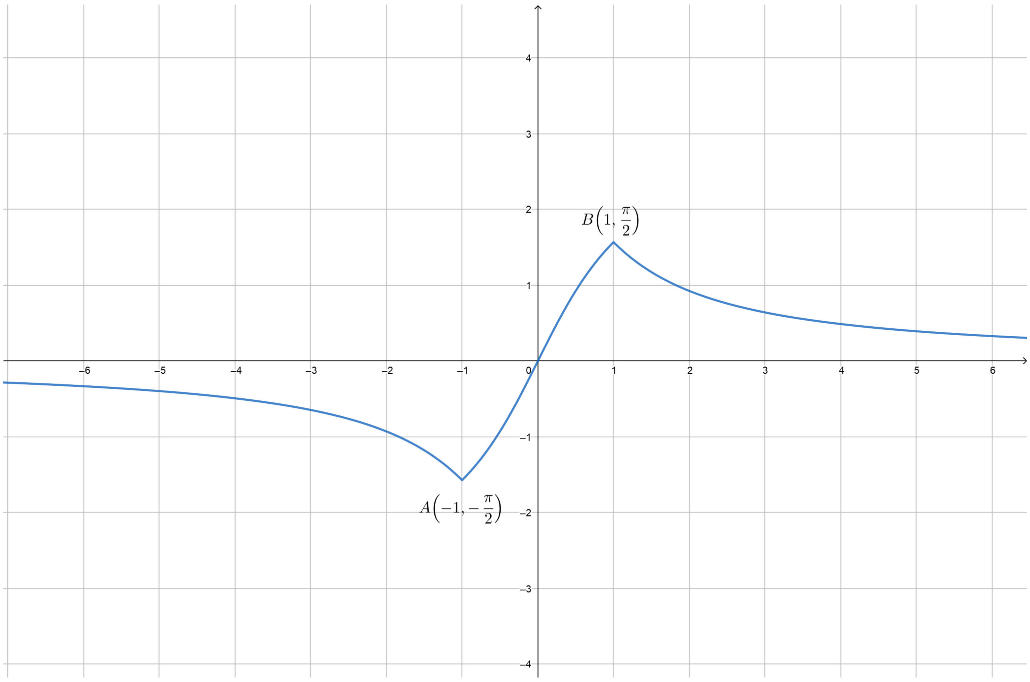

Figura 5: $x = \arcsin \frac{2t}{t^2+1}$

[2] vezi `https://www.geogebra.org/graphing`