Tema 2. Exerciţii de derivare

§1. Funcţii elementare

Funcţiile definite prin expresii finite de calcul, adică funcţiile elementare, se derivează prin reguli de calcul binecunoscute. Pentru exersarea acestora, se pot utiliza diverse programe de calcul simbolic, unele chiar online.[1]

Dintre regulile de derivare amintim una mai puţin cunoscută:

$$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u',$$

care se justifică astfel: avem, prin definiţie,

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u},$$

prin urmare

$$(u^v)' = \left(e^{v \ln u}\right)' = e^{v \ln u}(v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right).$$

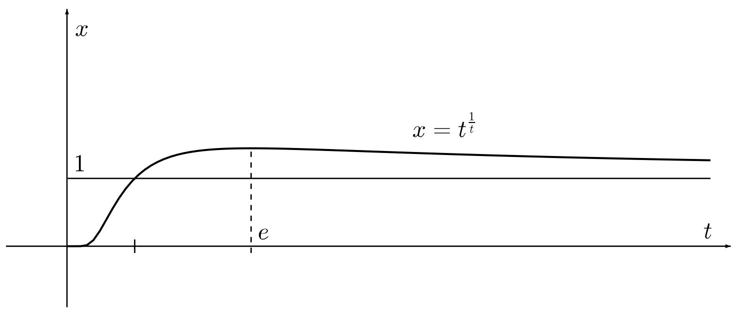
Exerciţiul 1.1. *Reprezentaţi grafic funcţia* $x(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $t \in (0, +\infty)$.

Rezolvare. Domeniul de definiţie este $D = (0, +\infty)$. Scriem funcţia sub forma

$$x(t) = t^{\frac{1}{t}} = e^{\ln t^{\frac{1}{t}}} = e^{\frac{\ln t}{t}}$$

şi calculăm limitele

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = e^0 = 1, \quad \lim_{t \to 0^+} x(t) = e^{-\infty} = 0.$$



[1]vezi, de exemplu, `https://www.symbolab.com/solver/derivative-calculator`

Derivata

$$x'(t) = e^{\frac{\ln t}{t}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)' = e^{\frac{\ln t}{t}} \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

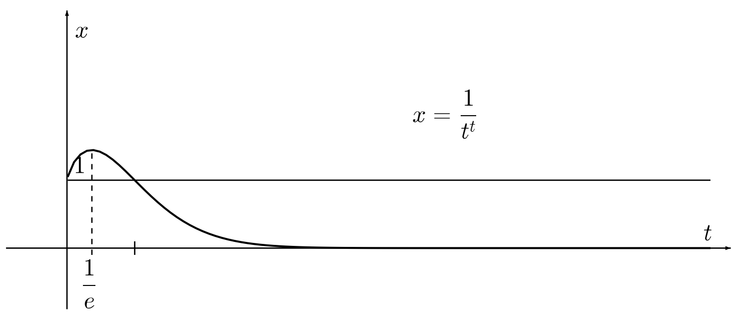
se anulează în $t = e$ şi are limitele

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = 1 \cdot 0 = 0, \quad \lim_{t \to 0^+} x'(t) = 0 \quad \text{(verificaţi!)}$$

Obţinem următorul tabel de variaţie:

t	\\\\\\	0		e		$+\infty$
x'	\\\\\\	0	$+$	0	$-$	0
x	\\\\\\	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

Exerciţiul 1.2. *Reprezentaţi grafic funcţia* $x(t) = \frac{1}{t^t}$, $t \in (0, +\infty)$.
Rezolvare.



§2. Serii de puteri

Funcţiile definite prin serii de puteri se derivează termen cu termen pe interiorul intervalului de convergenţă. Mai precis: dacă seria de puteri

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

are raza de convergenţa nenulă

$$\rho = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} > 0,$$

atunci pe intervalul $(-\rho, \rho)$ funcţia x este indefinit derivabilă şi prima sa derivată este

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots$$

Exerciţiul 2.1. *Să se determine domeniul maxim pe care este definită funcţia*

$$x(t) = 1 - \frac{t^2}{3 \cdot 1!} + \frac{t^4}{5 \cdot 2!} - \frac{t^6}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots \tag{1}$$

şi să se arate că aceasta este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$tx'' + (1+t^2)x' + tx = 0. \tag{2}$$

Rezolvare. Notând $t^2 = s$, seria de puteri (1) devine

$$1 - \frac{s}{3 \cdot 1!} + \frac{s^2}{5 \cdot 2!} - \frac{s^3}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n s^n}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots$$

iar aceasta are raza de convergenţă

$$\rho = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!} = +\infty,$$

deci mulţimea de convergenţă a seriei iniţiale este $\mathbb{R}$.

Calculăm derivatele

$$x'(t) = -\frac{2t}{3 \cdot 1!} + \frac{4t^3}{5 \cdot 2!} - \frac{6t^5}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n 2nt^{2n-1}}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots$$

$$x''(t) = -\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 1!} + \frac{3 \cdot 4t^2}{5 \cdot 2!} - \frac{5 \cdot 6t^4}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n (2n-1) \cdot 2nt^{2n-2}}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots$$

Efectuăm amplificările necesare pentru a obţine membrul stâng al ecuaţiei (2) şi aliniem după t^{2n+1}:

$$\begin{aligned}
2tx &= +\frac{2t}{1 \cdot 0!} - \frac{2t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{2t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{2t^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 2t^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} - \cdots \\
2x' &= -\frac{4t}{3 \cdot 1!} + \frac{8t^3}{5 \cdot 2!} - \frac{12t^5}{7 \cdot 3!} + \frac{16t^7}{9 \cdot 4!} - \cdots - \frac{(-1)^n \cdot 4(n+1)t^{2n+1}}{(2n+3) \cdot (n+1)!} + \cdots \\
2t^2x' &= +\frac{0 \cdot t}{1 \cdot 0!} - \frac{4t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{8t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{12t^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 4nt^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} - \cdots \\
tx'' &= -\frac{1 \cdot 2t}{3 \cdot 1!} + \frac{3 \cdot 4t^3}{5 \cdot 2!} - \frac{5 \cdot 6t^5}{7 \cdot 3!} + \cdots - \frac{(-1)^n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)t^{2n+1}}{(2n+3) \cdot (n+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

Adunăm cele patru egalităţi de mai sus şi obţinem

$$2tx + 2(1+t^2)x' + tx'' = 0 \cdot t + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^{2n+} + \cdots$$

Într-adevăr, pentru orice n, termenul care îl conţine pe t^{2n+1} în sumă este

$$\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!} \left[\frac{2}{2n+1} - \frac{4(n+1)}{(2n+3)(n+1)} + \frac{4n}{2n+1} - \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(n+1)} \right] = 0.$$

Exerciţiul 2.2. *Să se precizeze domeniile de definiţie ale următoarelor funcţii şi să se arate că ele sunt soluţii pentru ecuaţiile diferenţiale indicate.*

$$a)\;\; x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+2)n!}\,, \qquad tx''-(t-3)x'-2x=0\,;$$

$$b)\;\; x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\,, \qquad tx''+2x'+tx=0\,;$$

$$b)\;\; x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}\,t^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\,, \qquad x''-2x'+2x=0.$$

§3. Integrale cu parametri

Funcţiile definite prin integrale cu parametri se derivează cu formula

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds+f(t,b(t))\frac{d}{dt}b(t)-f(t,a(t))\frac{d}{dt}a(t), \quad (3)$$

valabilă numai dacă funcţiile a, b şi f satisfac condiţiile de regularitate necesare.

În cazul în care integrantul f nu depinde de parametrul t, formula de mai sus devine

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(s)ds=f(b(t))\frac{d}{dt}b(t)-f(a(t))\frac{d}{dt}a(t), \quad (4)$$

iar aceasta se stabileşte foarte uşor: pentru orice primitivă F a lui f avem

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(s)ds=\frac{d}{dt}\big(F(b(t))-F(a(t))\big)=$$

$$=F'(b(t))\frac{d}{dt}b(t)-F'(a(t))\frac{d}{dt}a(t)=f(b(t))\frac{d}{dt}b(t)-f(a(t))\frac{d}{dt}a(t).$$

În cazul în care limitele de integrare sunt constante, formula (3) capătă forma

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,s)ds=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds, \quad (5)$$

adică, în acest caz (şi numai în acest caz), derivarea comută cu integrarea.

Exerciţiul 3.1. *Să se studieze comportarea funcţiei*

$$x(t)=\int_t^{2t}\frac{ds}{e^s+s}, \quad (6)$$

pe intervalul $[\,0,+\infty)$.

Rezolvare. Deoarece în (6) integrantul $f(s)=\frac{1}{e^s+s}$ este funcţie continuă iar limitele integralei sunt funcţii de clasă C^1, rezultă că şi x este de clasă C^1 pe $[\,0,+\infty)$, cu $x(0)=0$.

Integrând de la t la $2t$ inegalităţile evidente

$$0\le\frac{1}{e^s+s}\le\frac{1}{e^s},$$

pentru orice $s \geq 0$, obţinem

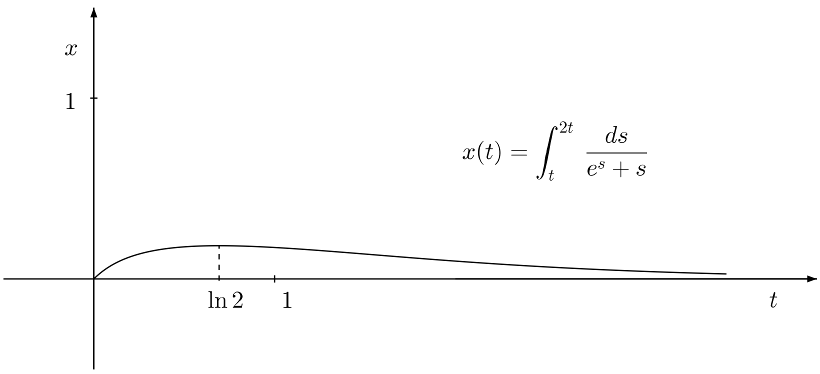
$$0 \leq x(t) \leq \int_t^{2t} \frac{ds}{e^s} = \frac{1}{e^t} - \frac{1}{e^{2t}} \to 0 \text{ pentru } t \to +\infty$$

şi deci $x(+\infty) = 0$.

Calculăm derivata x' cu formula (4). Avem

$$x'(t) = \frac{1}{e^{2t}+2t}(2t)' - \frac{1}{e^t+t}(t)' = \frac{2}{e^{2t}+2t} - \frac{1}{e^t+t} = \frac{e^t(2-e^t)}{(e^{2t}+2t)(e^t+t)}$$

de unde rezultă că $x'(t) > 0$ pentru $t \in [0, \ln 2)$, $x'(\ln 2) = 0$ şi $x'(t) < 0$ pentru $t \in (\ln 2, +\infty)$. In concluzie, pe intervalul $[0, \ln 2)$ funcţia f este strict crescătoare de la $f(0) = 0$ la o valoare maximă $v_{\max} = f(\ln 2)$ după care, pe intervalul $(\ln 2, +\infty)$, descreşte strict către 0 pentru $t \to +\infty$. Panta tangentei în origine este $x'(0) = 1$.



Exerciţiul 3.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ şi fie*

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds, \ \forall t \in I. \tag{7}$$

Să se verifice că $x = x(t)$ este o soluţie definită pe intervalul I a ecuaţiei diferenţiale

$$x'' + x = f(t).$$

Rezolvare. Derivăm inegrala (7) cu formula (3):

$$x'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sin(t-s)f(s)\Big)ds + \sin(t-t)f(t)t' - \sin(t-0)f(0)0' =$$

$$= \int_0^t \cos(t-s)f(s)ds + \sin 0 f(t) \cdot 1 - \sin t f(0) \cdot 0 = \int_0^t \cos(t-s)f(s)ds.$$

Calculăm derivata secundă:

$$x''(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(\cos(t-s)f(s)\Big)\,ds + \cos(t-t)f(t)t' - \cos(t-0)f(0)0' =$$

$$= -\int_0^t \sin(t-s)f(s)ds + \cos 0 f(t)\cdot 1 - \cos t f(0)\cdot 0 = -x(t) + f(t).$$

Exerciţiul 3.3. *Să se verifice că funcţia $x = x(t)$ dată de integrala*

$$x(t) = \int_0^\pi \cos(t\sin s)ds,\ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

este o soluţie definită pe întreaga axă reală a ecuaţiei diferenţiale

$$tx'' + x' + tx = 0.$$

Rezolvare. Aplicăm formula de derivare (5). Avem

$$x'(t) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t}\cos(t\sin s)ds = -\int_0^\pi \sin(t\sin s)\sin s\,ds$$

şi

$$x''(t) = -\int_0^\pi \cos(t\sin s)\sin^2 s\,ds.$$

Obţinem, pentru orice t,

$$tx''(t) + x'(t) + tx(t) = \int_0^\pi \big[t\cos(t\sin s)(1-\sin^2 s) - \sin(t\sin s)\sin s\big]\,ds =$$

$$= \int_0^\pi \big[t\cos(t\sin s)\cos^2 s - \sin(t\sin s)\sin s\big]\,ds =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s}\big[\sin(t\sin s)\cos s\big]\,ds = \sin(t\sin s)\cos s\Big|_{s=0}^{s=\pi} = 0.$$

Exerciţiul 3.4. *Să se demonstreze că următoarele funcţii*

a) $x(t) = t^n\int_0^\pi \cos(t\cos s)\sin^{2n} s\,ds$,

b) $x(t) = \int_0^\pi \cos(ns - t\sin s)\,ds$,

cu $n \in \mathbb{N}^*$, *sunt soluţii pentru ecuaţia lui Bessel*:

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0.$$

Rezolvare. Se procedează ca în exerciţiul precedent, în final se obţine că membrul stâng al ecuaţiei este egal, în cazul a, cu

$$t^{n+1}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s}\big[\sin(t\cos s)\sin^{2n+1} s\big]\,ds = t^{n+1}\sin(t\cos s)\sin^{2n+1} s\Big|_{s=0}^{s=\pi} = 0$$

şi, în cazul b, cu

$$-\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s}\big[\sin(ns - t\sin s)(n + t\cos s)\big]\,ds = -\sin(ns - t\sin s)(n + t\cos s)\Big|_{s=0}^{s=\pi} = 0.$$

§4. Clase de funcţii

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis. Spunem că funcţia $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este *de clasă C^0 pe I* dacă este continuă pe I, caz în care scriem $x \in C^0(I, \mathbb{R})$.

Spunem că funcţia x este *de clasă C^n pe I*, cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi scriem $x \in C^n(I, \mathbb{R})$, dacă x este (cel puţin) de n ori derivabilă şi derivata de ordin n, $x^{(n)}$, este continuă pe I. O funcţie derivabilă de oricâte ori se numeşte funcţie *indefinit derivabilă* şi clasa lor se notează cu $C^\infty(I, \mathbb{R})$.

În sfârşit, o funcţie reală $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *analitică în $t_0 \in I$* dacă există o serie de puteri cu raza de convergenţă $\rho_0 > 0$ astfel încât

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n, \quad \forall t \in I \text{ cu } |t - t_0| < \rho_0.$$

În acest caz $x = x(t)$ este indefinit derivabilă pe $I \cap (t_0 - \rho_0, t_0 + \rho_0)$ şi

$$a_n = \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!},$$

pentru orice n. O funcţie se numeşte *analitică pe I* dacă este analitică în orice punct $t_0 \in I$. Clasa funcţiilor analitice pe I va fi notată cu $C^\omega(I, \mathbb{R})$.

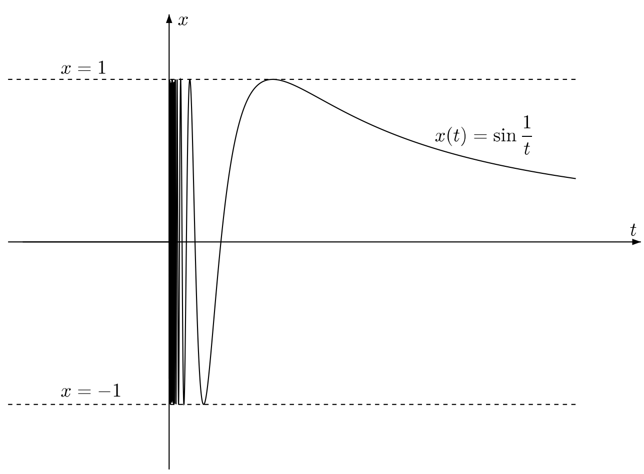
Exerciţiul 4.1. *Daţi un exemplu de funcţie $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are un punct de discontinuitate de speţa a doua.*

Rezolvare. Un punct $t_0 \in I$ în care funcţia x este discontinuă se numeşte *punct de discontinuitate de seţa întâi* dacă există ambele limite laterale $\lim\limits_{t \nearrow t_0} x(t)$ şi $\lim\limits_{t \searrow t_0} x(t)$, finite sau nu, altfel se numeşte *punct de discontinuitate de speţa a doua.*

De exemplu, funcţia

$$x(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

are în $t_0 = 0$ o discontinuitate de speţa a doua, deoarece $\nexists \lim\limits_{t \searrow t_0} x(t)$ (justificaţi).



Exerciţiul 4.2. *Notăm cu $D(I, \mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor derivabile pe I. Arătaţi că incluziunile*

$$C^0(I, \mathbb{R}) \subset D(I, \mathbb{R}) \subset C^1(I, \mathbb{R})$$

sunt stricte.

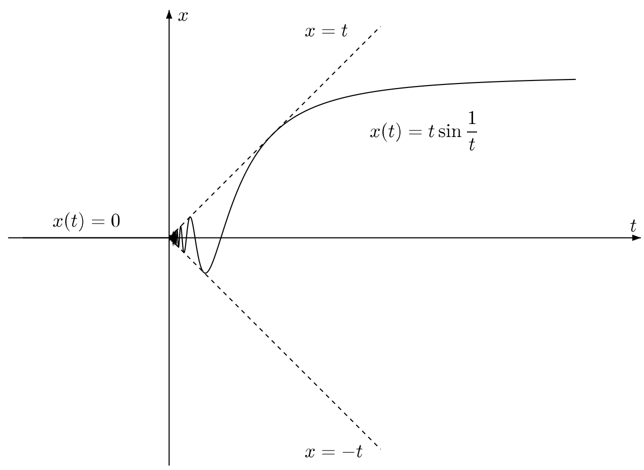
Rezolvare. Fie $x \in D(I, \mathbb{R})$ şi $t_0 \in I$ fixat arbitrar. Trecând la limită în egalitatea

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}(t - t_0),$$

obţinem

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t_0 - t_0) = x(t_0) + \text{finit} \cdot 0 = x(t_0),$$

deci x este continuă în t_0. Rezultă că este continuă pe I, şi astfel am arătat că prima incluziune are loc. Aceasta este strictă, funcţia modul $x(t) = |t - t_0|$ fiind un exemplu imediat de funcţie continuă pe I şi nederivabilă în t_0.



Funcţia $x(t) = |t - t_0|$ are totuşi derivate laterale în t_0, sa dăm şi un exemplu când măcar una din derivatele laterale nu există. Funcţia

$$x(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & t \in (0 + \infty), \\ 0, & t \in (-\infty, 0\,] \end{cases}$$

este evident continuă pe $I = \mathbb{R}$ iar derivata sa formală, calculată pe cele două intervale deschise, este

$$x'(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}, & t \in (0 + \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Observăm că nu există limita din derivată când $t \searrow 0$

$$\lim_{t \searrow 0} x'(t) = \lim_{t \searrow 0} \big(\sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} \big) = \nexists,$$

(justificare: şirul $x'(\frac{1}{n\pi}) = \sin n\pi - n\pi \cos n\pi = -(-1)^n \pi$ nu are limită), dar aceasta nu înseamnă ca funcţia nu este derivabilă în $t_0 = 0$, după cum vom vedea în exemplul următor. În $t_0 = 0$ calculăm derivatele laterale cu definiţia. Avem

$$x'_s(0) = \lim_{t \nearrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \lim_{t \nearrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0$$

şi

$$x'_d(0)=\lim_{t\searrow 0}\frac{x(t)-x(0)}{t-0}=\lim_{t\searrow 0}\frac{t\sin\frac{1}{t}-0}{t-0}=\lim_{t\searrow 0}\sin\frac{1}{t}=\nexists,$$

deci $x=x(t)$ nu este derivabilă în $t_0=0$.

În sfârşit, incluziunea

$$D(I,\mathbb{R})\subset C^1(I,\mathbb{R})$$

fiind evidentă, vom arăta că ea este strictă cu următorul exemplu de funcţie derivabilă pe întreaga axă reală dar cu derivata discontinuă:

$$x(t)=\begin{cases}t^2\sin\frac{1}{t}, & t\in(0+\infty),\\ 0, & t\in(-\infty,0\,]\end{cases}$$

Analog exemplului precedent, funcţia este derivabilă pe $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ având derivata formală bine definită pe aceste două intervale

$$x'(t)=\begin{cases}2t\sin\frac{1}{t}-\cos\frac{1}{t}, & t\in(0+\infty)\\ 0, & t\in(-\infty,0),\end{cases}$$

dar acum, în $t_0=0$ avem

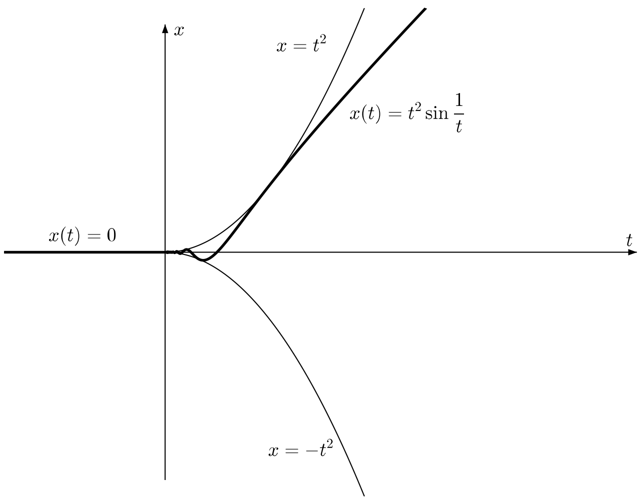
$$x'_s(0)=\lim_{t\nearrow 0}\frac{x(t)-x(0)}{t-0}=\lim_{t\nearrow 0}\frac{0-0}{t-0}=0,$$

şi

$$x'_d(0)=\lim_{t\searrow 0}\frac{x(t)-x(0)}{t-0}=\lim_{t\searrow 0}\frac{t\sin\frac{1}{t}-0}{t-0}=\lim_{t\searrow 0}t\sin\frac{1}{t}=0\cdot\text{mărginit}=0,$$

prin urmare funcţia $x=x(t)$ este derivabilă şi în $t_0=0$, având $x'(0)=0$. Derivata x' este definită pe $\mathbb{R}$ dar este discontinuă în $t_0=0$, unde are o discontinuitate de speţa a doua, deoarece nu există limita laterală

$$\lim_{t\searrow 0}x'(t)=\lim_{t\searrow 0}\big(2t\sin\frac{1}{t}-\cos\frac{1}{t}\big)=0-\ \nexists=\nexists.$$



Exerciţiul 4.3. *Arătaţi că derivata unei funcţii $x \in D(I, \mathbb{R})$ nu poate avea discontinuităţi de speţa întâi.*

Rezolvare. Se arată că dacă într-un punct $t_0 \in I$ derivata are limite laterale, atunci la calculul limitelor raportului incrementar se poate aplica regula lui l'Hôpital şi astfel se obţine că derivatele laterale în t_0 sunt egale cu limitele laterale ale derivatei. Funcţia $x = x(t)$ fiind presupusă derivabilă în t_0, rezultă că limitele laterale ale derivatei sunt egale cu valoarea ei în t_0, prin urmare derivata este continuă în t_0.

Exerciţiul 4.4. *Fie $x = x(t)$ o funcţie continuă pe I şi derivabilă pe $I \setminus \{t_0\}$. Arătaţi că, dacă derivata are limită finită când $t \to t_0$, adică*

$$\lim_{t \to t_0} x'(t) = \ell'_0 \in \mathbb{R},$$

atunci funcţia este derivabilă şi în t_0, cu $x'(t_0) = \ell'_0$.

Rezolvare. Se aplică regula lui l'Hôpital în definiţia lui $x'(t_0)$.

Exerciţiul 4.5. *Arătaţi că incluziunea*

$$C^\infty(I, \mathbb{R}) \subset C^\omega(I, \mathbb{R})$$

este strictă.

Rezolvare. Se poate folosi următorul exemplu de funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ dar care nu este analitică în $t_0 = 0$:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Trebuie arătat că $x^{(n)}(0) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.