Tema 3. Ecuaţii cu variabile separabile

Exerciţiul 1. *Integraţi următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile şi comparaţi soluţia găsită cu cea indicată*[1]

a) $tx' = x^3 + x,$ $\qquad x^2 = Ct^2(x^2+1);$

b) $3e^t \mathrm{tg}\, x dt + (1-e^t)\sec^2 x dx = 0,$ $\qquad C(e^t-1)^3 = \mathrm{tg}\, x;$

c) $x - tx' = a(1+t^2x'),\ a \in \mathbb{R},$ $\qquad (x-a)(at+1) = Ct;$

d) $x'\mathrm{tg}\, t - x = 0,$ $\qquad x = C\sin t;$

e) $t^2(x+1)dt + (t^3-1)(x-1)dx = 0,$ $\qquad C(t^3-1)e^{3x} = (x+1)^6;$

f) $(1+x^2)(e^{2t}dt - e^x dx) = (1+x)dx,\ C + \frac{1}{2}e^{2t} = e^x + \mathrm{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2);$

g) $(t^2x - t^2 + x - 1)dt + (tx + 2t - 3x - 6)dx = 0,$

$$C = t^2/2 + 3t + x + \ln(t-3)^{10}(x-3)^3;$$

h) $xdt - tdx = x^2dt,$ $\qquad t = x(t+C);$

Rezolvare. La punctul h) se scrie ecuaţia sub forma

$$d\left(\frac{t}{x}\right) = dt$$

şi apoi se integrează; este o ecuaţie (EVS) în variabilele t şi $y = \frac{t}{x}$.

Exerciţiul 2. *Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy, comparaţi soluţia găsită cu cea indicată*:

a) $(1+e^t)xx' = e^t,\ x(0) = 1,$ $\qquad 2e^{x^2/2} = \sqrt{e}(1+e^t);$

b) $(tx^2+t)dt + (t^2x - x)dx = 0,\ x(0) = 1,$ $\qquad (1-t^2)(x^2+1) = 2;$

c) $x'\sin t - x\ln x = 0, x(\pi/2) = 1,$ $\qquad x(t) \equiv 1;$

d) $(1+x^2)dt + 2t\sqrt{t-t^2}dx = 0,\ x(\frac{1}{2}) = 0,$ $\qquad x = \mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{1}{t} - 1} - 1\right);$

Exerciţiul 3. *Rezolvaţi problema Cauchy*

$$\begin{cases} (\sqrt{1+t^2} + x)dt + (\sqrt{1+x^2} + t)dx = 0, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Aplicăm următorul calcul formal: scriem ecuaţia sub forma

$$\sqrt{1+t^2}dt + \sqrt{1+x^2}dx + d(tx) = 0,$$

o integrăm

$$\int \sqrt{1+t^2}dt + \int \sqrt{1+x^2}dx + \int d(tx) = \int 0,$$

şi obţinem soluţia generală

$$\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right) + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right) + tx = C.$$

Din condiţia iniţială rezultă $C = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

[1] G. Micula, P. Pavel *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca 1989, pag 13.

Exerciţiul 4. *Reduceţi la cazul* (EVS) *următoarele ecuaţii, efectând substituţiile indicate*:

$$a)\ \ x' = (t+x)^2, \qquad \to \qquad y = t+x \qquad \to \qquad t+x = \mathrm{tg}\,(t+C);$$

$$b)\ \ x' = (8t+2x+1)^2, \ \to\ y = 8t+2x+1 \ \to\ 8t+2x+1 = 2\mathrm{tg}\,(4t+C);$$

$$c)\ \ x' = \sin(t-x), \ \to\ y = t-x \ \to\ (t+C)\cos(t-x) = 1+\sin(t-x);$$

$$d)\ \ x' - 1 = e^{t+2x}, \qquad \to \qquad y = t+2x \qquad \to \qquad 3e^{-2x} + 2e^t = Ce^{-2t}.$$

Observaţie. Toate ecuaţiile de mai sus au forma

$$x' = g(ax+bt+c)$$

şi cu substituţia $y = ax+bt+c$ se obţine $y' = ax' + b$ iar ecuaţia devine

$$y' = ag(y) + b,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

Exerciţiul 5. *Integraţi ecuaţia*

$$x' = \frac{\sqrt{t^2+x^2} - t}{x}.$$

Rezolvare. Observăm că ecuaţia poate fi pusă sub forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2+x^2) = \sqrt{t^2+x^2}$$

şi efectăm substituţia

$$u = t^2 + x^2.$$

Obţinem soluţia generală $x^2 = 2Ct + C^2$.