Tema 4. Ecuaţii omogene

Exerciţiul 1. *Integraţi următoarele ecuaţii diferenţiale omogene sau reductibile la ecuaţii omogene şi comparaţi soluţia găsită cu cea indicată*

a) $x' = \frac{x}{t} + \mathrm{tg}\frac{x}{t}$, $\sin\frac{x}{t} = Ct$;

b) $x + (2\sqrt{xt} - t)x' = 0$, $\sqrt{\frac{t}{x}} + \ln x = C$;

c) $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$ $x = -t\ln\ln\frac{C}{t}$;

d) $(\sqrt{t^2+x^2} + x)dt - tdx = 0$, $t^2C = x + \sqrt{t^2+x^2}$;

e) $(t^2 + tx + x^2)dt - t^2dx = 0$, $\frac{x}{t} = \mathrm{tg}\ln Ct$;

f) $(t^2 + x^2)dt - txdx = 0$, $\ln t - \frac{x^2}{2t^2} = C$;

g) $tx' = \sqrt{t^2 - x^2} + x$, $x = t\sin\ln Ct$;

h) $t\ln\frac{t}{x}dx - xdt = 0$, $\frac{t}{x} = e^{Cx+1}$;

i) $(t - x\cos\frac{x}{t})dt + t\cos\frac{x}{t}dx = 0$, $t = Ce^{-\sin\frac{x}{t}}$;

j) $(t^2 + 2tx - x^2)dt + (x^2 + 2tx - t^2)dx = 0$, $t^2 + x^2 = C(t+x)$;

k) $x' = \frac{t-2x+5}{-2t+x-4}$, $s = t - (-1), y = x - 2 \ \rightarrow\ (t+x-1)^3 = C(t-x+3)$;

$$\begin{cases} t - 2x + 5 = 0 \\ -2t + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$s = t + 1, \quad y = x - 2$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s - 2y}{-2s + y}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1 - 2\frac{y}{s}}{-2 + \frac{y}{s}} \Rightarrow u = \frac{y}{s} \ \rightarrow\ y = us \ \rightarrow\ \frac{dy}{ds} = u + s\frac{du}{ds}$$

$$u + s\frac{du}{ds} = \frac{1-2u}{-2+u}$$

$$s\frac{du}{ds} = \frac{1-2u}{-2+u} - u$$

$$s\frac{du}{ds} = \frac{1-u^2}{-2+u}$$

$$\frac{-2+u}{1-u^2}du = \frac{ds}{s}$$

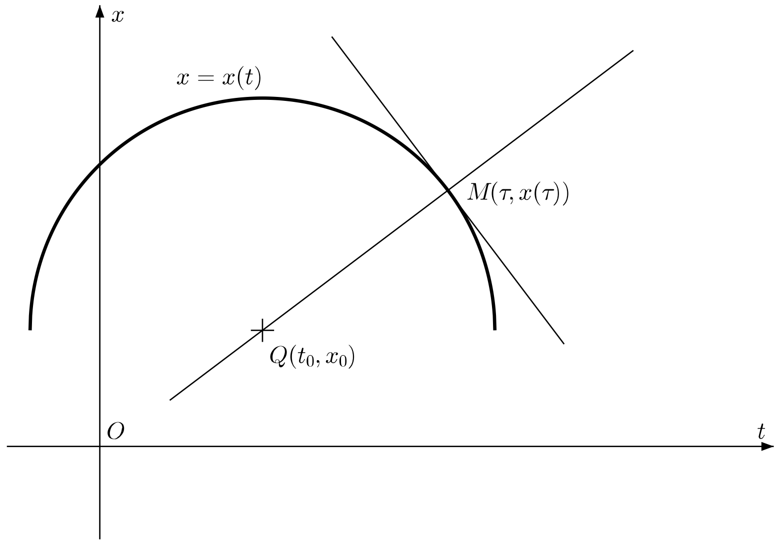
$$\cdots\ \cdots$$

l) $x' = \frac{t+2x+1}{2t+4x+3}$, $u = t + 2x \ \rightarrow\ \ln|4u+5| + 4u - 8t = C$;

Problema 1. *Aflaţi curbele plane pentru care toate tangentele trec printr-un punct dat $Q(t_0, x_0)$.*

Soluţie. $x - x_0 = C(t - t_0)$

Problema 2. *Aflaţi curbele plane pentru care toate normalele trec printr-un punct dat $Q(t_0, x_0)$.*



Rezolvare. Presupunem că graficul funcţiei $x = x(t)$, cu $t \in I$, are proprietatea cerută. Normala într-un punct $M(\tau, x(\tau))$ de pe grafic are panta $m_\perp = -\frac{1}{x'(\tau)}$, prin urmare ecuaţia normalei este

$$x - x(\tau) = -\frac{1}{x'(\tau)}(t - \tau).$$

Cerem ca punctul $Q(t_0, x_0)$ să aparţină acestei drepte şi obţinem ecuaţia diferenţială

$$x_0 - x(\tau) = -\frac{1}{x'(\tau)}(t_0 - \tau), \quad \forall \tau \in I.$$

Această ecuaţie, rescrisă cu t în loc de τ, are forma

$$x'(x_0 - x) = t - t_0$$

şi este o ecuaţie cu variabile separabile pentru care curbele integrale sunt date de relaţia

$$(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2 = C,$$

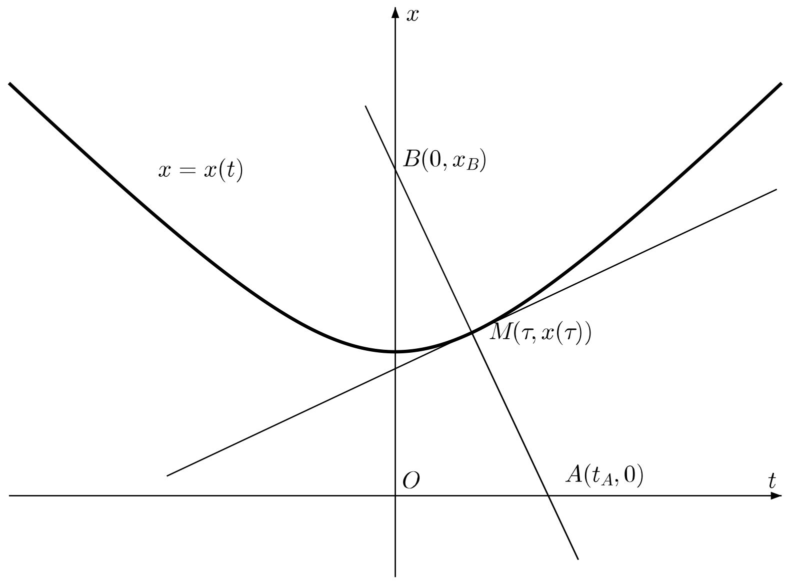
adică sunt cercurile de centru $Q(t_0, x_0)$, aşa cum era de aşteptat.

Problema 3. *Aflaţi curbele plane pentru care segmentul de tangentă determinat de axe are ca mijloc exact punctul de pe curbă.*

Soluţie. Ecuaţia diferenţială: $-x't = x$, curbele integrale: $x = C/t$.

Problema 4. *Aflaţi curbele plane pentru care segmentul de normală determinat de axe are ca mijloc exact punctul de pe curbă.*

Soluţie. Ecuaţia diferenţială: $xx' = t$, curbele integrale: $x = \sqrt{t^2 + C}$.


x
$x = x(t)$
$B(0, x_B)$
$M(\tau, x(\tau))$
O
$A(t_A, 0)$
t