Tema 5. Ecuaţii liniare şi ecuaţii Bernoulli

§1. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Ecuaţia liniară

$$x' = a(t)x + b(t),$$

cu $a = a(t)$ şi $b = b(t)$ funcţii continue, se rezolvă cu formula

$$x = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt\right),$$

unde prin $\int \cdot dt$ înţelegem o singură primitivă a funcţiei integrate.

Exerciţiul 1.1. *Să se integreze ecuaţia*

$$x' = -\frac{2}{t}x + t^3, \quad t > 0.$$

Rezolvare. Avem o ecuaţie liniară cu

$$a(t) = -\frac{2}{t} \to \int a(t)dt = -\int \frac{2}{t}dt = -2\ln t \to e^{\int a(t)dt} = e^{\ln \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t^2}$$

şi

$$b(t) = t^3 \to \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt = \int t^2 \cdot t^3 dt = \frac{t^6}{6}.$$

Obţinem

$$x = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt\right) = \frac{1}{t^2}\left(C + \frac{t^6}{6}\right) = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{6}t^4.$$

Verificare: calculăm membrul stâng al ecuaţiei

$$x'(t) = \left(\frac{C}{t^2} + \frac{1}{6}t^4\right)' = -\frac{2C}{t^3} + \frac{4}{6}t^3$$

şi membrul drept

$$-\frac{2}{t}x(t) + t^3 = -\frac{2}{t}\left(\frac{C}{t^2} + \frac{1}{6}t^4\right) + t^3 = -\frac{2C}{t^3} + \frac{4}{6}t^3,$$

şi observăm că sunt egali.

Exerciţiul 1.2. *Integraţi următoarele ecuaţii diferenţiale liniare şi comparaţi soluţia găsită cu cea indicată*

a) $x' = x\,\mathrm{tg}\, t + \cos t,$ $\qquad x = \frac{1}{\cos t}(C + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t);$

b) $x' = 2tx + t - t^3,$ $\qquad x = Ce^{t^2} + \frac{1}{2}t^2;$

c) $x' = -ax + be^{pt}$ $\qquad x = Ce^{-at} + \frac{b}{a+p}e^{pt}, \quad a + p \neq 0;$

$d)$ $x' = \frac{2t-1}{t^2}x + 1$ $\qquad x = Ct^2e^{\frac{1}{t}} + t^2;$

$e)$ $tx' - \frac{1}{t+1}x - t + 1 = 0,$ $\qquad x = \frac{t}{t+1}(C + \frac{1}{t} + t);$

$f)$ $x' \operatorname{tg} t - x = a,$ $\qquad x = C \sin t - a;$

$g)$ $(1+t^2)x' - 2tx = (1+t^2)^2,$ $\qquad x = (1+t^2)(C+t);$

$h)$ $(1-t^2)x' + tx - a = 0,$ $\qquad x = C\sqrt{1-t^2} + at;$

$i)$ $(t^2-1)^{\frac{3}{2}}dx + (t^3 + 3tx\sqrt{t^2-1})dt = 0,$ $\qquad x = (t^2-1)^{-\frac{3}{2}}(C - \frac{t^4}{4});$

$j)$ $\sqrt{a^2+t^2}dx + (t + x - \sqrt{a^2+t^2})dt = 0,$

$$x = \frac{1}{t+\sqrt{a^2+t^2}}\big(C + a^2\ln(t + \sqrt{a^2+t^2})\big);$$

$k)$ $(t^2+2t-1)x' - (t+1)x = t - 1,$ $\qquad x = C\sqrt{t^2+2t-1} + t;$

$l)$ $t\ln t\, x' = x + t^3(3\ln t - 1),$ $\qquad x = C\ln t + t^3;$

$m)$ $(a^2-t^2)x' + tx = a^2,$ $\qquad x = \sqrt{a^2-t^2}C + t;$

$n)$ $t(t^3+1)x' + (2t^3-1)x - \frac{t^3-2}{t} = 0,$ $\qquad x = C\frac{t}{t^3+1} + \frac{1}{t};$

$o)$ $x' = \frac{n}{t+1}x + (t+1)^n e^x,$ $\qquad x = (t+1)^n(C + e^t);$

$p)$ $(2t-1)x' = 2x + \frac{1-4t}{t^2},$ $\qquad x = (2t-1)C + \frac{1}{t};$

$r)$ $(3t^2-2t)x' = (6t-2)x - \frac{2}{t}(9t-4),$ $\qquad x = (3t^2-2t)C + \frac{2}{t};$

Exerciţiul 1.3. *Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy*:

$a)$ $tx' + x = e^t,\ x(a) = b,$ $\qquad$ *Soluţie* : $x = \frac{1}{t}(ab - e^a - e^t);$

$b)$ $x' = \frac{1}{1-t^2}x + 1 + t,\quad x(0) = 0,$ $\qquad x = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t);$

$c)$ $x' = \operatorname{tg} t\, x + \frac{1}{\cos t},\quad x(0) = 0,$ $\qquad x = t/\cos t;$

$d)$ $tx' = nx + t^{n+1}\ln t,\quad x(1) = 0,$ $\qquad x = t^n(\frac{1}{4} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{2}\ln t);$

$e)$ $tx' = nx + t^{n+1}e^t,\quad x(1) = 1,$ $\qquad x = t^n(e^t - e + 1);$

$f)$ $x' + x\cos t = \sin t\cos t,\quad x(0) = 1,$ $\qquad x = 2e^{-\sin t} + \sin t - 1;$

$g)$ $x' = \frac{2}{1-t^2}x + 2t + 2,\quad x(0) = -3,$ $\qquad x = \frac{t+1}{t-1}(3 + t^2 - 2t);$

$h)$ $tx' + (2t^2-1)x = 2t^2 - 1,\quad x(1) = 1 - 1/e,$ $\qquad x = Cte^{-t^2} + 1;$

$i)$ $x' = 2x - t^2,\quad x(0) = 1/4,$ $\qquad x = \frac{1}{4}(2t^2 + 2t + 1);$

Exerciţiul 1.4 *Integraţi următoarele ecuaţii diferenţiale prin trecere la ecuaţia funcţiei inverse, $t = t(x)$:*

$a)$ $(x^2 - 6t)x' + 2x = 0,$ $\qquad$ *Soluţie* : $t = Cx^3 + x^2/2;$

b) $(t - 2tx - x^2)x' + x^2 = 0,$ $\qquad t = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2;$

c) $x'(t\cos x + \sin 2x) - 1 = 0, \quad x(-2) = \pi,$ $\qquad t = Ce^{\sin x} - 2\sin x - 2;$

e) $(2t - x^2)x' = x,$ $\qquad t = x^2(C - \ln x);$

f) $x'(x^2 - t) - x = 0,$ $\qquad t = \frac{1}{x}(C + \frac{x^3}{3});$

g) $e^x dt + (te^x - 2x)dx = 0,$ $\qquad t = e^{-x}(C + x^2);$

h) $x(1 + x^2)dt - (t + tx^2 + x^2)dx = 0,$ $\qquad t = x(C + \operatorname{arctg} x);$

i) $x(1 + x)^2 dt - (t + tx^2 + x^2)dx = 0,$ $\qquad t = Cxe^{\frac{2}{x+1}} + \frac{x}{2};$

§2. Ecuaţii Bernoulli

Ecuaţia de forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad x > 0, \qquad \text{(E.Bernoulli)}$$

cu $\alpha \neq 1$, se reduce la o ecuaţie liniară dacă împărţim la x^α

$$x^{-\alpha}x' = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$$

şi notăm

$$y = x^{1-\alpha}.$$

Avem

$$y' = (1 - \alpha)x^{-\alpha}x'$$

şi ecuaţia devine

$$y' = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t).$$

Exerciţiul 2.1. *Să se integreze ecuaţia*

$$x' = \frac{4}{t}x + t\sqrt{x}, \; t > 0, \; x > 0,$$

Rezolvare. Avem o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = \frac{1}{2}$. Împărţim cu $\sqrt{x}$ şi obţinem

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = \frac{4}{t}\sqrt{x} + t,$$

notăm $y = \sqrt{x}$, avem $y' = \frac{x'}{2\sqrt{x}}$, deci ecuaţia devine

$$y' = \frac{2}{t}y + \frac{t}{2}.$$

Avem o ecuaţie liniară cu

$$a(t) = \frac{2}{t} \to \int a(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t \to e^{\int a(t)dt} = e^{\ln t^2} = t^2$$

şi

$$b(t) = \frac{t}{2} \to \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \ln t.$$

Obţinem

$$y = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt \right) = t^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln t \right)$$

şi inversând substituţia

$$y = \sqrt{x} \ \leftrightarrow \ x = y^2,$$

obţinem soluţia generală a ecuaţiei iniţiale

$$x = t^4 (C + \frac{1}{2} \ln t)^2.$$

Exerciţiul 2.2. *Integraţi următoarele ecuaţii Bernoulli şi comparaţi soluţia găsită cu cea indicată*

a) $x' = \frac{4}{t} x + t\sqrt{x}$ $\qquad x = t^4 (C + \frac{1}{2} \ln t)^2;$

b) $x' = -\frac{1}{t} x - tx^2$ $\qquad xt(C + t) = 1;$

c) $2txx' - x^2 + t = 0$ $\qquad x^2 = t(C + \ln t);$

d) $3tx' - x(1 + t \sin t - 3x^3 \sin t) = 0$ $\qquad x^3 (3 + Ce^{\cos t}) = t;$

e) $x' + 2x = e^t x^2$ $\qquad x(Ce^{2t} + e^t) = 1;$

f) $x' = \frac{t}{2(t^2-1)} x + \frac{t}{2x}.$ $\qquad x^2 = \sqrt{t^2 - 1}(C + \sqrt{t^2 - 1});$

g) $x' = x \mathrm{tg}\, t + x^4 \cos t$ $\qquad x^{-3} = \cos^3 t (C - 3 \,\mathrm{tg}\, t);$

h) $txdx = (x^2 + t)dt$ $\qquad x^2 = Ct^2 - 2t;$

i) $tx^2 x' = t^2 + x^3$ $\qquad x^3 = Ct^3 - 3t^2;$

j) $\sqrt{a^2 + t^2} dx + (t + x - \sqrt{a^2 + t^2}) dt = 0,$
$\qquad x = \frac{1}{t + \sqrt{a^2 + t^2}} \left(C + a^2 \ln(t + \sqrt{a^2 + t^2}) \right);$

k) $x^{n-1} (ax' + x) = t$ $\qquad nx^n = Ce^{-\frac{nt}{a}} + nt + a;$

l) $tx' + x = tx^2 \ln t$ $\qquad x = \frac{1}{t(C + 1/2 \ln^2 t)};$

m) $t^2 x' + 2t^3 x = x^2 (1 + 2t^2)$ $\qquad \frac{1}{x} = Ce^{t^2} + \frac{1}{t};$

n) $(1 + t^2)x' = tx + t^2 x^2$ $\qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \left(C - \frac{1}{2} t\sqrt{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right);$

o) $(t^2 + 2tx^3)dt + (x^2 + 3t^2 x^2)dx = 0$ $\qquad t^3 + 3t^2 x^3 + x^3 = C;$

Exerciţiul 2.3. *Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy şi reperezentaţi grafic soluţiile găsite, definite pe domeniul lor maxim de definiţie*:

a) $x' = \frac{4}{t^2-1} x + t\sqrt{x}, \ \ x(0) = 13, \ t \in (-1, 1), \ x > 0;$

b) $x' = 2tx + 2t^3 x^2, \ x(0) = 1, \ x > 0;$

c) $3x^2 x' + x^3 + t = 0, \ x(0) = \sqrt[3]{2}, \ x > 0;$