Tema 7. Metoda parametrului

§1. Ecuaţii Lagrange

O ecuaţie de forma
$$x = t\varphi(x') + \psi(x') \tag{1}$$
cu φ şi ψ de clasă C^1 şi $\varphi(x') \not\equiv x'$, se rezolvă astfel: derivăm
$$x' = \varphi(x') + t\varphi'(x')\,x'' + \psi'(x')\,x'',$$
notăm $x' = p$, avem $x'' = \frac{dp}{dt}$, şi obţinem ecuaţia
$$p - \varphi(p) = (t\varphi'(p) + \psi'(p))\,\frac{dp}{dt}$$
pe care o trecem la ecuaţia funcţiei inverse
$$\frac{dt}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$
care este o ecuaţie liniară în necunoscuta $t = t(p)$. După ce aflăm soluţia ei generală sub forma
$$t = \theta(p, c),$$
obţinem soluţiile (1) sub formă parametrică:
$$\begin{cases} t = \theta(p, c) \\ x = \theta(p, c)\varphi(p) + \psi(p), \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exerciţiul 1.1. *Integraţi ecuaţia Lagrange*
$$x = t\frac{x'}{2} + \frac{2}{x'}.$$

Rezolvare. Derivăm şi notăm $x' = p$, cu $x'' = \frac{dp}{dt}$,
$$x' = \frac{x'}{2} + t\frac{x''}{2} - \frac{2x''}{x'^2} \to \frac{p}{2} = \frac{dp}{dt}\left(\frac{t}{2} - \frac{2}{p^2}\right) \to \frac{dt}{dp} = \frac{1}{p}t - \frac{4}{t^3}$$
Avem de integrat o ecuaţie liniară cu
$$a(p) = \frac{1}{p} \to \int a(p)dp = \int \frac{1}{p} = \ln p \to e^{\int a(p)dp} = e^{\ln p} = p,$$
$$b(p) = -\frac{4}{p^3} \to \int b(p)e^{-\int a(p)dp}dp = -4\int \frac{1}{p^4}dp = \frac{4}{5p^5}.$$
Obţinem
$$t = p\big(C + \frac{4}{5p^5}\big),$$
şi, în final, soluţia ecuaţiei iniţiale dată de parametrizarea
$$\begin{cases} t = p\big(C + \frac{4}{5p^5}\big) \\ x = \big(C + \frac{4}{5p^5}\big)\frac{p^2}{2} + \frac{2}{p}, p \neq 0. \end{cases}$$

Exerciţiul 1.1. *Integraţi următoarele ecuaţii Lagrange.*

$a)$ $x = 2tx' - 4x'^3$ *Soluţie :* $t = \frac{C}{p^2} + 3p^2, \ x = -\frac{2C}{p} + 2p^3$

$b)$ $x = (1 + x')t + x'^2$ $t = Ce^{-p} - 2p + 2, \ x = \cdots$

$c)$ $x = 2tx' + \sqrt{1 + x'^2}$ $t = \frac{1}{2p^2}(C - p\sqrt{1 + p^2} + \ln(p + \sqrt{1 + p^2}), x = \cdots$

$d)$ $x = -tx' + x'^2$ $t = \frac{1}{\sqrt{p}}(C + \frac{2}{3}p\sqrt{p}) \ \ x = \cdots$

$e)$ $x = 2tx' - x'^2$ $t = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p, \ x = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}$

$f)$ $tx'(x' + 2) - x = 0$ $x = \pm 2\sqrt{Ct} + C; \ x = -t$

$g)$ $2tx' - x = \ln x'$ $t = \frac{1}{p^2}(C + p), \ x = \cdots$

$h)$ $xx' = 2tx'^2 + 1$ $t = \frac{1}{p^2}(C + \ln p), \ x = \cdots$

§2. Ecuaţii Clairaut

Ecuaţia

$$x = tx' + \psi(x') \tag{2}$$

se rezolvă tot prin derivare:

$$x' = x' + tx'' + \psi'(x')x'' \rightarrow \ x''(t + \psi'(x')) = 0.$$

Dacă produsul a două funcţii continue este identic egal cu zero pe un interval, atunci pe subintervale cel puţin una dintre ele este nulă, obţinem pentru ecuaţia noastră două cazuri:

Cazul I, $x'' = 0$. Rezultă $x' = C$, constant, şi din (2) obţinem soluţia generală sub forma familiei de drepte

$$x = Ct + \psi(C), \ C \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Cazul II, $t + \psi'(x') = 0$. Notăm $x' = p$ şi obtinem soluţia singulară dată de ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p), \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Exerciţiul 2.1. *Arătaţi că orice tangentă la curba dată de soluţia singulară a unei ecuaţii Clairaut face parte din familia de drepte dată de soluţia generală.*

Rezolvare. Tangenta în punctul $M(t(p), x(p))$ de pe o curbă netedă Γ dată de parametrizarea

$$\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p), \quad p \in I \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

este dreapta de ecuaţie

$$x - x(p) = \frac{x'(p)}{t'(p)}(t - t(p)),$$

unde cu $'$ este notată derivata în raport cu parametrul p. În cazul curbei (4) avem

$$\frac{x'(p)}{t'(p)} = \frac{-\psi'(p) - p\psi''(p) + \psi'(p)}{-\psi''(p)} = p$$

iar ecuaţia tangentei devine

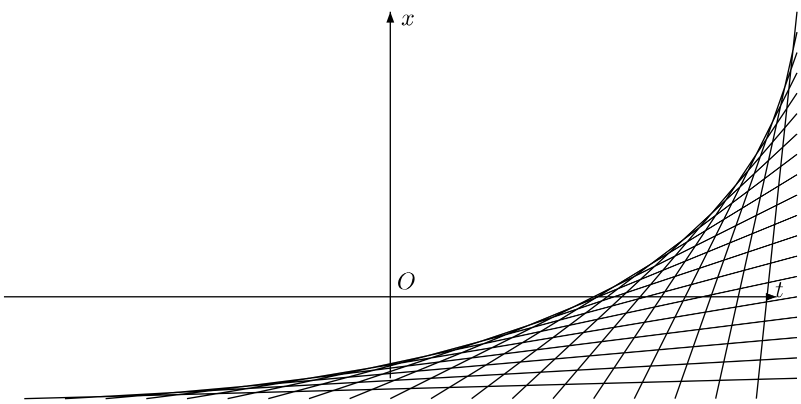
$$x + p\psi'(p) - \psi(p) = p(t + \psi'(p)),$$

adică

$$x = pt + \psi(p),$$

aşa cum trebuia arătat.

Observaţie. Mai sus am demonstrat că *înfăşurătoarea* familiei de drepte (3) este curba (4).



Exerciţiul 2.2. *Integraţi următoarele ecuaţii Clairaut.*

a) $x = tx' - \ln x'$, *Soluţie :* $x = tC - \ln C,\ x = 1 + \ln t$;

b) $x = tx' + \frac{1}{x'^2}$, $x = tC + \frac{1}{C^2},\ 4x^3 = 27t^2$;

c) $2x'^2(x - tx') = 1$, $2C^2(x - tC) = 1,\ 8x^3 = 27t^2$;

d) $x = tx' + \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}$, $x = tC + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}},\ x^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}} = 1$;

e) $tx'^2 - xx' - 1 = 0$, $tC^2 - xC - 1 = 0,\ x^2 + 4t = 0$;

f) $x'^3 = 3(tx' - x)$, $C^3 = 3(tC - x),\ 9x^2 = 4t^3$;

§3. Metoda parametrului pentru $x = f(t, x')$

Ecuaţiile Lagrage şi Clairout sunt ecuaţii deiferenţiale de ordinul întâi explicitate în raport cu funcţia necunoscută, adică au forma

$$x = f(t, x').$$

Metoda paramerizării utilizată mai sus poate fi aplicată şi acestui caz general, dar ecuaţia obţinută nu mai este, de regulă, rezolvabilă prin cuadraturi. Mai precis, derivând şi notând $x' = p$, obţinem ecuaţia

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x') + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x')x'' \to \ p = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p) + \frac{\partial f}{\partial p}(t, p)\frac{dp}{dt}.$$

Dacă rezolvăm ultima ecuaţie sub forma $p = \psi(t, C)$ atunci soluţia ecuaţiei iniţiale este $x = f(t, \psi(t, C))$, iar dacă o rezolvăm sub forma $t = \theta(p, C)$ atunci pentru ecuaţia iniţială avem soluţia dată parametric

$$\begin{cases} t = \theta(p, C) \\ x = f(\theta(p, C), p). \end{cases}$$

Exerciţiul 3.1. *Integraţi ecuaţia*

$$x = x'^2 e^{x'}.$$

Rezolvare. Derivăm şi notăm $x' = p$

$$x = x'^2 e^{x'} \to x' = 2x'x''e^{x'} + x'^2 e^{x'} x'' \to 1 = (2e^p + pe^p)\frac{dp}{dt}$$

Am ajuns la o ecuaţie cu variabile separabile pe care o integrăm

$$\int dt = \int (2e^p + pe^p)dp \to t = e^p + pe^p + c$$

şi, în final, obţinem soluţia sub forma

$$\begin{cases} t = e^p + pe^p + c \\ x = p^2 e^p, \ \ p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

§4. Metoda parametrului pentru $t = f(x, x')$

O ecuaţie explicitată în raport cu argumentul t, adică o ecuaţie de forma

$$t = f(x, x')$$

poate fi abordată tot prin derivare în raport cu t:

$$t = f(x, x') \to 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x')x' + \frac{\partial f}{\partial p}(x, x')x''.$$

Acum notăm $x' = p$ şi considerăm că p este o funcţie de variabila x, deci calculăm x'' astfel

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = p\frac{dp}{dx}$$

şi obtinem ecuaţia

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,p)p + \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)p\frac{dp}{dx}.$$

Dacă rezolvăm ultima ecuaţie sub forma $p = \psi(t, C)$ atunci soluţia ecuaţiei iniţiale este, sub formă implicită, $t = f(x, \psi(t, C))$, iar dacă o rezolvăm sub forma $x = \xi(p, C)$ atunci pentru ecuaţia iniţială avem soluţia dată parametric

$$\begin{cases} t = f(\xi(p,C), p) \\ x = \xi(p,C). \end{cases}$$

Exerciţiul 4.1. *Integraţi ecuaţia*

$$t = \sin x' - \ln x'$$

Rezolvare. Derivăm în raport cu t, notăm $x' = p$ şi derivăm $\frac{dp}{dt}$ prin variabila x. Avem

$$t = \sin x' - \ln x' \to 1 = \cos x' x'' - \frac{x''}{x'} \to 1 = \left(\cos p - \frac{1}{p}\right) p\frac{dp}{dx}$$

Am ajuns iarăsi la o ecuaţie cu variabile separabile pe care o integrăm

$$\int dx = \int (p\cos p - 1)\, dp \to x = p\sin p + \cos p - p + C,$$

şi, în final, obţinem soluţia sub forma

$$\begin{cases} t = \sin p - \ln p \\ x = p\sin p + \cos p - p + C, \;\; p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

§5. Probleme care conduc la ecuaţii Clairaut

Problema 5.1. *Să se determine curba plană pentru care aria triunghiului format de tangentă cu axele este constantă şi egală cu* $2a^2$.

Rezolvare. Ecuaţia tangentei în $(\tau, x(\tau))$ este

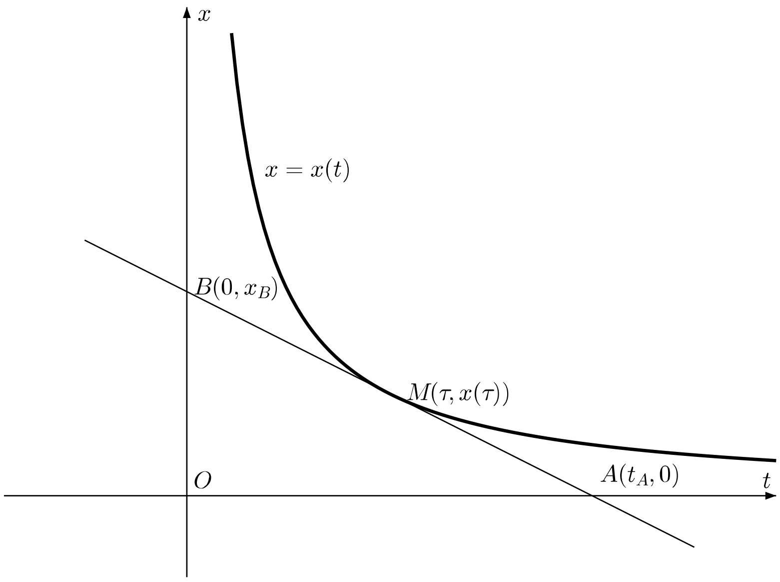
$$x - x(\tau) = x'(\tau)(t - \tau).$$

Intersecţiile cu axele:

$$A\big(t_A = \tau - \frac{x(\tau)}{x'(\tau)}, x_A = 0\big),\;\; B\big(t_B = 0, x_B = x(\tau) - \tau x'(\tau)\big)$$

Aria $\Delta AOB = 2a^2 \Leftrightarrow t_A x_B = 4a^2 \Leftrightarrow (x - x't)^2 = -4a^2 x'$ (E. Clairaut)

Obţinem $tx = a^2$ şi tangentele.



Problema 5.2. *Să se determine curba plană pentru care segmentul de tangentă determinat de axe are lungime constantă şi egală cu a.*

Rezolvare.

$\|AB\| = a \Leftrightarrow t_A^2 + x_B^2 = a^2 \Leftrightarrow (x - x't)^2 = \frac{a^2 x'^2}{1+x'^2}$ (E. Clairaut)

Obţinem $x^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ şi tangentele.

Problema 5.3. *Să se determine curba plană pentru care suma lungimilor segmentelor determinate de tangentă pe cele două axe este constantă şi egală cu a.*

Rezolvare.

$\|OA\| + \|OB\| = a \Leftrightarrow t_A + x_B = a \Leftrightarrow x - x't = \frac{ax'}{x'-1}$ (E. Clairaut)

Obţinem $\sqrt{x} + \sqrt{t} = \sqrt{a}$ şi tangentele.

Problema 5.4. *Să se determine curba plană pentru care distanţa de la origine la tangentă este constantă şi egală cu r.*

Rezolvare. Distanţa de la (t_0, x_0) la dreapta $f(t,x) = at + bx + c = 0$ este

$$d = \frac{|f(t_0, x_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In cazul nostru $r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow r = \frac{|tx' - x|}{\sqrt{1+x'^2}}$ (E. Clairaut).

Obţinem cercul $x^2 + t^2 = r^2$ şi tangentele.