

Tema 8. Exerciții recapitulative

Verificați-vă cunoștințele de până acum pe următoarele exemple de subiecte date la testări semestriale în anii antecovid.

§1. Varianta A

I. Să se reprezinte grafic soluția saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = -\frac{tx}{t^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

II. Rezolvați problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 + tx + t^2}{t^2}, \\ x(1) = 0, \end{cases}$$

și determinați intervalul de existență al soluției saturate.

III. Aflați soluția generală a ecuației

$$\frac{x}{\sqrt{1 - t^2x^2}} dt + \left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2x^2}} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) dx = 0.$$

IV. Rezolvați ecuația Clairaut

$$x = tx' + x'(1 - \ln x')$$

și verificați că orice tangentă la graficul soluției singulare este din familia de drepte dată de soluția generală.

§2. Varianta B

I. Să se reprezinte grafic soluția saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = -\frac{tx}{t^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

II. Rezolvați problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 + t^2}{tx}, \\ x(1) = \sqrt{2}, \end{cases}$$

și determinați intervalul de existență al soluției saturate.

III. Aflați soluția generală a ecuației

$$\left(\frac{x}{1 + t^2x^2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right) dt + \frac{t}{1 + t^2x^2} dx = 0.$$

IV. Rezolvați ecuația Clairaut

$$x = tx' - \frac{x'^2}{4}$$

și verificați că orice tangentă la graficul soluției singulare este din familia de drepte dată de soluția generală.