Tema 9. Existenţă globală

Exerciţiul 1. *Să se discute, în funcţie de valorile parametrului* $\xi \in \mathbb{R}$, *domeniul de definiţie şi comportarea soluţiilor saturate pentru următoarele probleme Cauchy*:

$$a)\ \begin{cases} x' = 2tx(1-x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x' = \dfrac{x^2+1}{t}, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \\ x(1) = \xi, \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = 3t^2x^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x' = -\dfrac{2t^3}{x}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ x(0) = \xi > 0, \end{cases}$$

Rezolvare. Deoarece ecuaţiile sunt rezolvabile prin cuadraturi, integrăm ecuaţia în fiecare caz în parte, apoi rezolvăm problema Cauchy şi studiem soluţiile găsite. Rezolvăm, de exemplu, punctul a.

$$\frac{dx}{dt} = 2tx(1-x) \ \to \ \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int 2tdt \ \to$$

$$\to \ \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t^2 + c_0 \ \to \ \frac{x}{1-x} = c_1 e^{t^2}$$

$$\to \ x = \frac{c_1 e^{t^2}}{1 + c_1 e^{t^2}} = \frac{e^{t^2}}{\frac{1}{c_1} + e^{t^2}} = \frac{e^{t^2}}{c_2 + e^{t^2}}$$

Observăm că soluţia

$$x(t) = \frac{e^{t^2}}{c + e^{t^2}}$$

are, în funcţie de c, următorul intervalul maxim de definiţie $I_{\max} \subset \mathbb{R}$, cu $t_0 = 0 \in I_{\max}$

$$I_{\max} = \begin{cases} \mathbb{R}, \ c \geq -1 \\ (-\sqrt{\ln(-c)}, +\sqrt{\ln(-c)}), \quad c < -1, \end{cases}$$

şi are următorul comportament în capetele intervalului de definiţie: dacă $c \geq -1$ atunci

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$$

iar pentru $c < -1$

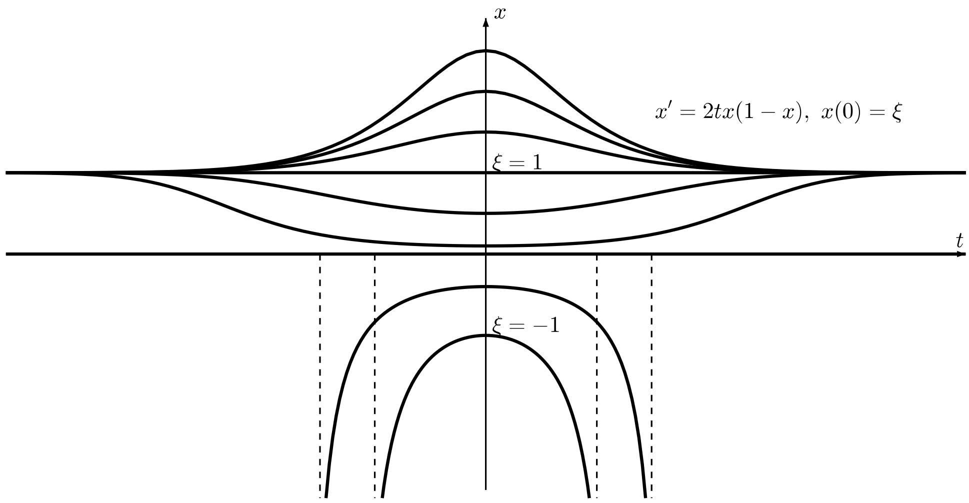
$$\lim_{t \searrow -\sqrt{\ln(-c)}} x(t) = \lim_{t \nearrow +\sqrt{\ln(-c)}} x(t) = -\infty.$$

Din condiţia iniţială avem

$$x(0) = \xi \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{c+1} = \xi \;\Leftrightarrow\; c = \frac{1}{\xi} - 1,$$

prin urmare

$$c < -1 \;\Leftrightarrow\; \xi < 0.$$



În concluzie, pentru $\xi \neq 0$, soluţia problemei Cauchy are forma

$$x(t) = \frac{e^{t^2}}{\frac{1}{\xi} - 1 + e^{t^2}}, \; t \in I_{\max},$$

şi avem următoarea discuţie:

Cazul $\xi \in (-\infty, 0)$. Soluţia saturată este definită pe $I_{\max} = (-T_\xi, T_\xi)$, cu $T_\xi = \sqrt{\ln(1 - \frac{1}{\xi})}$, şi are limitele egale cu $-\infty$ în capete intervalului de definiţie.

Cazul $\xi = 0$. Problema Cauchy are soluţia nulă, $x(t) = 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Cazul $\xi \in (0, +\infty)$. Soluţia saturată este definită pe $I_{\max} = \mathbb{R}$ şi are limitele egale cu $+1$ când $t \to \pm\infty$. Observăm că pentru $\xi = 1$ problema Cauchy are soluţia staţionară $x(t) \equiv 1$.

Exerciţiul 2. *Să se arate că soluţiile saturate la dreapta ale problemelor Cauchy*

a) $\begin{cases} x' = -x(x-t)^2, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{t^2+1}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} x' = -tx(x^2-1)(x^2-4), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

sunt definite, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$*, pe întreaga semiaxă* $[0,+\infty)$ *şi au limită finită când* $t \to +\infty$*.*

Rezolvare. a). Deoarece funcţia $f(t,x) = -x(x-t)^2$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}\times\Omega$, cu $\Omega = \mathbb{R}$, rezultă că ipotezele rezultatelor de existenţa şi unicitate globală sunt îndeplinite.

Observăm că pentru $\xi = 0$ problema Cauchy admite soluţia nulă $x(t) \equiv 0$. Deoarece graficele a două soluţii nu se pot intersecta, rezultă că soluţiile care pleacă dintr-un $\xi \neq 0$ nu se pot anula şi, prin urmare, păstrează semnul lui ξ pe tot intervalul de existenţă.

Dacă $\xi > 0$, soluţia saturată la dreapta $x = x(t)$, cu $t \in [0,T)$, rămâne strict pozitivă, rezultă că

$$x'(t) = -x(t)(x(t)-t)^2 < 0$$

pentru orice $t \in [0,T)$, deci $x = x(t)$ este descrescătoare şi pozitivă. Urmează că există şi este finită limita

$$\lim_{t\nearrow T} x(t) = x^* \in \Omega = \mathbb{R},$$

de unde obţinem că $T = +\infty$, altfel soluţia ar fi continuabilă.

Dacă $\xi < 0$ soluţia rămâne strict negativă, de unde rezultă că este strict crescătoare, având prin urmare iarăşi limită finită cânt $t \to T = +\infty$.

Vom arăta că, mai mult, pentru orice ξ,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^* = 0.$$

Într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că $x^* \neq 0$, atunci, pentru $x^* > 0$ de exemplu, avem

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t) = -\lim_{t\to+\infty} x(t)(x(t)-t)^2 = -x^*(x^*-\infty)^2 = -\infty. \qquad (1)$$

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $x = x(t)$ pe intervalele $[n, n+1]$, obţinem existenţa unui şir $t_n \in (n, n+1)$ astfel încât

$$x(n+1) - x(n) = x'(t_n)[(n+1)-n],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin urmare am găsit un şir $t_n \to +\infty$ cu

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \lim_{t\to+\infty} (x(n+1) - x(n) = x^* - x^* = 0,$$

în contradicţie cu valoarea $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = -\infty$ dată de (1). Această contradicţie este eliminată numai dacă $x^* = 0$.

b). Concluzia se obţine prin acelaşi raţionament ca la punctul precedent. Totuşi, în acest caz nu se mai poate trage şi concluzia că toate soluţiile tind la zero când $t \to +\infty$, deoarece în locul relaţiei (1) acum avem

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t) = -\lim_{t\to+\infty} \frac{x(t)}{t^2+1} = -\frac{x^*}{+\infty} = 0.$$

De fapt, observând că ecuaţia este rezolvabilă prin cuadraturi, avem

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t^2+1} \;\rightarrow\; \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t^2+1} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \ln|x| = -\operatorname{arctg} t + c_0 \;\rightarrow\; x = c_1 e^{-\operatorname{arctg} t}.$$

Obţinem soluţia problemei Cauchy

$$x = \xi e^{-\operatorname{arctg} t}, t \in \mathbb{R},$$

şi avem

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \xi e^{-\frac{\pi}{2}},$$

pentru orice ξ.

c). Se observă că ecuaţia are acum cinci soluţii staţionare care împart semiplanul drept în şase regiuni invariante o pentru soluţii.