Tema 11. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

§1. Sisteme omogene

Exerciţiul 1.1. *Să se rezolve, prin metoda substituţiei, următoarele sisteme omogene*

$$(i)\ \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y, \end{cases}$$

$y = x' - 2x$
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$$(ii)\ \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$$

$z = x' - 3x + y$
$2y = -x'' + 7x' - 10x$
$x''' - 11x'' + 36x' - 36 = 0$
$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$

$$(iii)\ \begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z \\ y' = 6x - y - 6z \\ z' = -8x + 3y + 9z \end{cases}$$

$5z = x' + 4x - 2y$
$y = -5x'' + 13x' - 8x$
$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

§2. Sisteme neomogene

Exerciţiul 2.1. *Aflaţi soluţia generală a următoarelor sisteme*:

$$(i)\ \begin{cases} x' = -2x - y + \sin t \\ y' = 4x + 2y + \cos t, \end{cases}$$

$y = -2x - x' + \sin t$
$x'' = -2\sin t$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$(ii)\ \begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t \\ y' = x + 2y + 3e^t \end{cases}$$

$y = x' - 2x - 2e^t$
$x'' - 4x' + 3x = 5e^t$
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

$$(iii)\ \begin{cases} x' = 2x + y + 2z + 2 - t \\ y' = -x + 1 \\ z' = -x - y + z + 1 - t \end{cases}$$

$x = -y' + 1$
$2z = -y'' + 2y' - y - 4 + t$
$y''' - 2y'' + y' - 2y = 1 + 2t$
$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \pm i$