Tutorial 1. Curbe netede în plan

Considerăm în plan un sistem de coordonate carteziene xOy, notăm cu $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ versorii axelor, notăm cu $M(x,y)$ punctul de coordonate $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi cu $\vec{r}_M$ vectorul său de poziţie $\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OM}$.

În acest tutorial vom prezenta noţiunea de *curbă netedă* în plan[1] şi vom justifica forma ecuaţiei tangentei la curbă în următoarele patru cazuri:

a) Curba este definită explicit sub forma $y = y(x)$, $x \in I$, cu $y \in C^1(I,\mathbb{R})$. Tangenta în punctul $M_0(x_0, y(x_0))$ are ecuaţia

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

b) Curba este explicitată ca $x = x(y)$, $y \in J$, cu $x \in C^1(J,\mathbb{R})$. Tangenta în $M_0(x(y_0), y_0)$ are ecuaţia

$$x - x(y_0) = x'(y_0)(y - y_0). \tag{2}$$

c) Curba Γ este definită implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$, cu F de clasă C^1. Tangenta în punctul $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ are ecuaţia

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

d) Curba are ecuaţiile parametrice

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

Tangenta la Γ la momentul $t_0 \in I$ este dreapta de ecuaţie

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}. \tag{4}$$

Exemplu. *Notăm cu Γ locul geometric al punctelor $M(x,y)$ pentru care distanţa până la origine este egală cu distanţa până la dreapta Δ de ecuaţie $x = -1$. Să se arate că Γ este o curbă netedă şi să se scrie ecuaţia tangentei la curbă în punctul $M_0(0,1) \in \Gamma$.*

Rezolvare. Distanţa de la M la O este $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ iar distanţa de la M la Δ este egală cu $MN = |x_M - x_N| = |x + 1|$, vezi Figura 1. Din echivalenţele

$$OM = MN \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |x + 1| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2x - 1 = 0,$$

obţinem

$$\Gamma = \{M(x,y) \mid \ y^2 - 2x - 1 = 0\}.$$

[1] mai precis: curbă plană care admite tangentă în orice punct al său

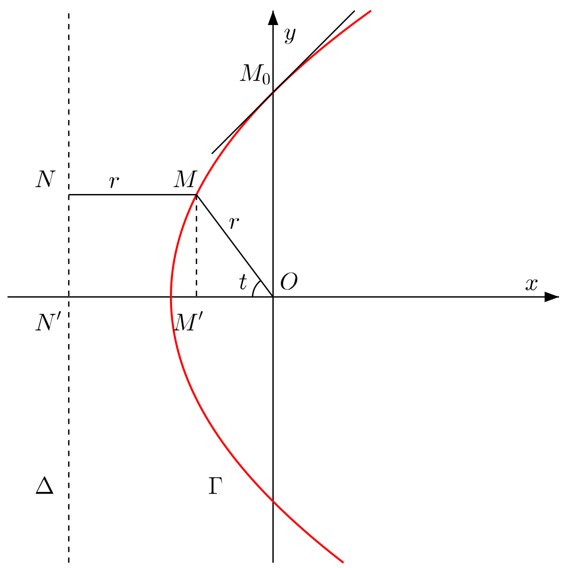

Figura 1: Parabola $y^2 = 2x + 1$

Prin urmare, mulţimea Γ este definită implicit de ecuaţia

$$F(x, y) = 0,$$

cu $F(x, y) = y^2 - 2x - 1$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Deoarece F este de clasă C^1 cu gradientul nenul,

$$\overrightarrow{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = -2\vec{i} + 2y\vec{j} \neq \vec{0}, \quad \forall (x, y),$$

rezultă că Γ este o curbă netedă (vezi §3). De fapt, Γ este parabola cu focarul $O(0, 0)$ şi cu dreapta directoare Δ.

Observăm că $F(0, 1) = 0$, deci $M_0(0, 1) \in \Gamma$. Ecuaţia tangentei la Γ în $M_0(0, 1)$ este, conform formulei (3),

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}(0,1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Dacă explicităm ramura de parabolă care trece prin $M_0(0, 1)$ sub forma

$$y = \sqrt{2x + 1}$$

avem

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}},$$

şi ecuaţia tangentei dată de (2) devine

$$y - 1 = y'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x - 0 \Leftrightarrow y = x + 1,$$

iar dacă explicităm parabola sub forma

$$x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

avem

$$x'(y) = y,$$

şi, prin urmare, (2) devine

$$x - 0 = x'(1)(y - 1) \Leftrightarrow x - 0 = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

În sfârşit, parametrizăm acum parabola Γ în funcţie de unghiul $t = \sphericalangle M'OM$. Cu notaţiile din Figura 1, din $N'M' + M'O = 1$ rezultă $r + r\cos t = 1$, deci

$$r = \frac{1}{1 + \cos t}.$$

Cum $x_M = x_{M'} = -r\cos t$ şi $y_M = r\sin t$, obţinem ecuaţiile parametrice

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x(t) = -\dfrac{\cos t}{1 + \cos t}, \\ y(t) = \dfrac{\sin t}{1 + \cos t}, \quad t \in (-\pi, \pi). \end{cases}$$

Calculăm derivatele

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\sin t}{(1 + \cos t)^2}, \\ y'(t) = \dfrac{1}{1 + \cos t}, \quad t \in (-\pi, \pi). \end{cases}$$

Pentru $t_0 = \frac{\pi}{2}$ avem $x(t_0) = 0$ şi $y(t_0) = 1$, iar ecuaţia tangentei în $M_0(0, 1)$ dată de formula (4) este

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{1} \Leftrightarrow y = x + 1,$$

aşa cu era de aşteptat.

Cei care doresc să afle mai multe amănunte sunt invitaţi să citească în continuare.

§1. Dreapta în plan

Fie $M_0(x_0, y_0)$ şi $M_1(x_1, y_1)$ două puncte distincte în plan, cu $x_0 \neq x_1$. Prin definiţie, *panta* $m_{M_0M_1}$ a segmentui M_0M_1 este tangenta unghiului φ format de segment cu direcţia orizontală

$$m_{M_0M_1} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

De exemplu, în Figura 2 segmentul M_0M_1 are panta $m = \frac{2}{3}$.

Considerăm acum un al treilea punct, $M(x, y)$. Este clar că punctele M_0, M_1 şi M sunt coliniare dacă şi numai dacă segmentele M_0M şi M_0M_1 au pantele egale, obţinem de aici *ecuaţia dreptei prin două puncte*

$$m_{M_0M} = m_{M_0M_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

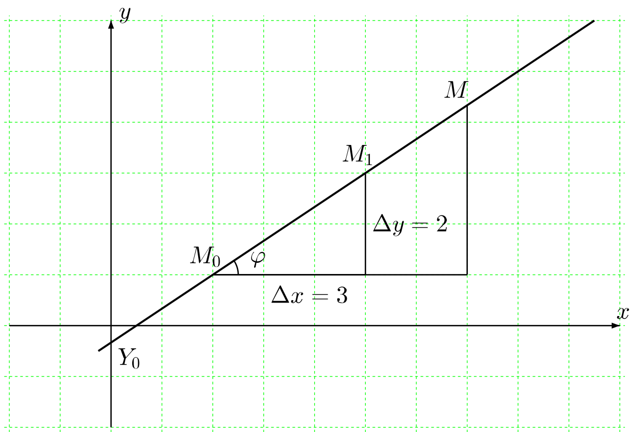

Figura 2: Ecuaţia dreptei

ecuaţie pe care preferăm să o scriem sub forma

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \tag{5}$$

deoarece acum cuprinde şi cazul când M coincide cu M_0 sau cu M_1.

De exemplu, dreapta M_0M_1 din Figura 2 are ecuaţia

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Din (5), considerând cunoscut numai punctul M_0 şi panta m a segmentului M_0M_1, obţinem *ecuaţia dreptei de pantă dată care trece printr-un punct dat*:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{6}$$

Această ecuaţie poate fi pusă sub forma numită *ecuaţia normală a dreptei*

$$y = mx + n$$

în care coeficientul m este panta dreptei, iar n este ordonata punctului $Y_0(0, n)$ de intersecţie a dreptei cu axa Oy.

În cazul în care $x_0 = x_1$ segmentul M_0M_1 are poziţia verticală, unghiul φ are $\frac{\pi}{2}$ radiani iar tangenta lui este infinită, se spune deci că dreapta M_0M_1 are pantă infinită, iar ecuaţia ei,

$$x = x_0,$$

nu mai poate fi scrisă la forma normală.

Amintim, în final, *ecuţia generală* a dreptei

$$ax + by + c = 0, \quad (d)$$

în care coeficienţii a şi b nu sunt simultani nuli, adică $a^2 + b^2 > 0$. Să observăm că, dacă notăm

$$F(x, y) = ax + by + c$$

atunci condiţia $a^2 + b^2 > 0$ asigură că gradientul lui F este nenul

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} \neq \vec{0}, \quad \forall(x, y),$$

de unde rezultă că dreapta este o curbă netedă. Menţionăm şi că valoarea funcţiei $F(x_M, y_M)$ este proporţională cu distanţa de la punctul $M(x_M, y_M)$ la dreapta d, mai precis

$$\mathrm{dist}(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

§2. Curbe plane definite explicit

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie $y = y(x)$ o funcţie definită pe I cu valori în $\mathbb{R}$. Graficul funcţiei este mulţimea de puncte

$$\Gamma_y = \{(x, y) \mid y = y(x),\ x \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

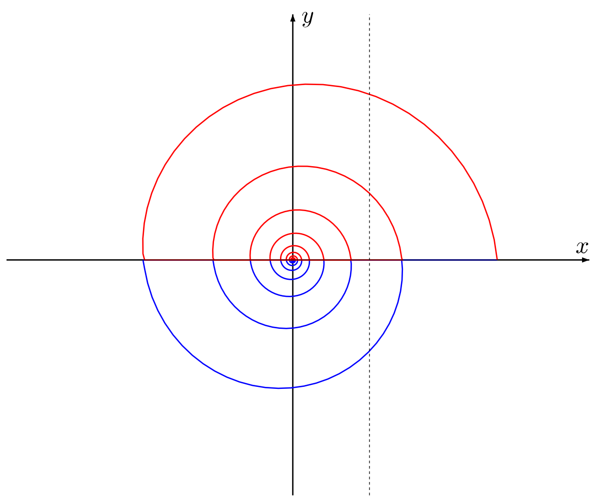

Figura 3: Spirala logaritmică

Să observăm că nu orice mulţime de puncte $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ poate fi graficul unei funcţii $y = y(x)$. De exemplu, spirala din Figura 3 nu poate fi un astfel de grafic, deoarece există drepte verticale care o intersectează în mai multe puncte. Totuşi, spirala poate fi descompusă într-o reuniune de arce (roşii şi albastre), care fiecare în parte poate fi graficul unei funcţii $y = y(x)$, caz în care spunem că respectivul arc a fost definit explicit, şi are ecuaţia $y = y(x)$, cu $x \in I$.

Evident că schimbând rolul variabilelor x şi y, orice arc de spirală din semiplanul $x < 0$, de exemplu, poate fi explicitat ca fiind graficul unei funcţii $x = x(y)$

$$\Gamma_x = \{(x, y) \mid x = x(y),\ y \in J\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Cerinţa minimă pentru ca graficul unei funcţii să fie numit *curbă*, sau *arc de curbă*, este ca funcţia să fie continuă pe intervalul de definiţie. Totuşi, există funcţii continue a căror grafic nu are aspectul aşteptat, cel al unui segment de dreaptă deformat în mod continuu.

Un exemplu celebru este *funcţia lui Takagi*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \ll 2^n x \gg,\ x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

unde $\ll u \gg$ reprezintă distanţa de la u la cel mai apropiat număr întreg (eroarea de rotunjire). Funcţia este bine definită şi continuă pe întreaga axă reală[2] şi, printre alte proprietăţi surprinzătoare, are şi următoarea: în orice x de forma $x = \frac{k}{2^n}$, cu $k \in \mathbb{Z}$ şi $n \in \mathbb{N}$, funcţia lui Takagi are un punct de minim local strict.

Cum închiderea mulţimii $\{\frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ este întreaga axă reală, avem un exemplu de funcţie continuă care are o mulţime densă de puncte de minim local strict.

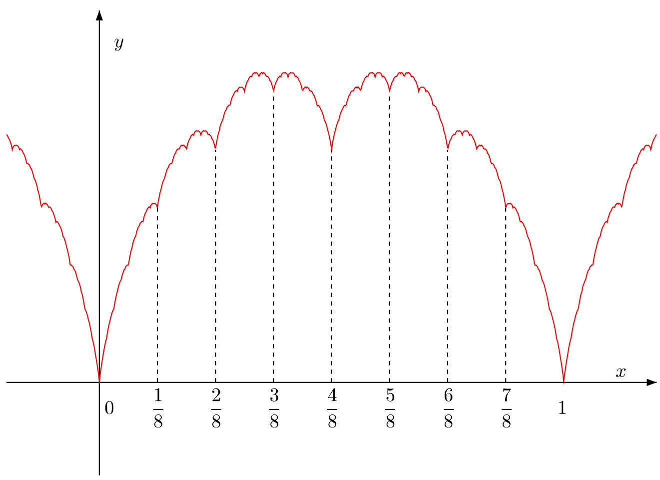

Figura 4: Funcţia lui Takagi

Un astfel de grafic are un aspect complet neregulat, noi suntem interesaţi de curbe mai netede, mai precis curbe care să admită tangentă în orice punct.

Fie $M(x_0, y_0)$, cu $y_0 = y(x_0)$, un punct fixat pe graficul Γ_y al unei funcţii $y = y(x)$, $x \in I$, şi fie $M(x, y)$ punctul curent pe grafic.

Definiţie. *Dacă dreptele secante M_0M tind la o poziţie limită atunci când M tinde la M_0, spunem că graficul admite tangentă în M_0 şi anume dreapta care are poziţia limită a secantelor.*

Problema 1. *Arătaţi că graficul Γ_y admite tangentă în punctul $M_0(x_0, y_0)$ dacă şi numai dacă funcţia $x = y(x)$ are derivată, finită sau nu, în x_0.*

Rezolvare. Poziţia secantelor M_0M este perfect determinată de pantele lor m_{M_0M}, rezultă că poziţia lor limită este dată de limita acestor pante, altfel spus,

[2] se arată că este periodică de perioadă 1 şi apoi, pe intervalul $[0, 1]$, se aplică criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii.

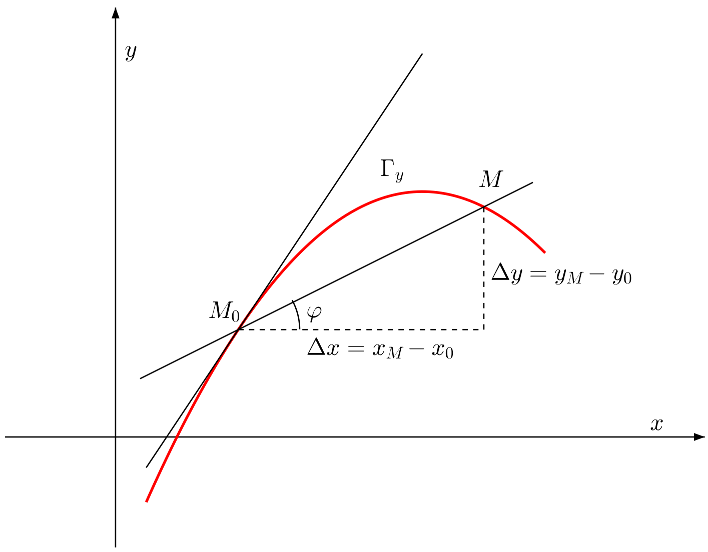

Figura 5: Tangenta la grafic

tangenta la grafic în M_0 este dreapta care trece prin M_0 şi are panta m_0 dată de limita pantelor m_{M_0M} când $M \to M_0$ pe graficul funcţiei, adică

$$m_0 = \lim_{M \to M_0,\ M \in \Gamma} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_M \to x_0} \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = y'(x_0).$$

În concluzie, graficul Γ_y al unei funcţii $y = y(x)$ admite tangentă într-un punct $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma_y$ dacă şi numai dacă funcţia y are derivată în x_0. Panta tangentei este, prin definiţie, valoarea derivatei în x_0; dacă aceasta este infinită tangenta este verticală, altfel tagenta este dreapta de ecuaţie

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Prin urmare, dacă $y = y(x)$ este de clasă C^1, adică o funcţie derivabilă cu derivata continuă, atunci graficul său admite tangentă în orice punct şi aceasta variază continuu, din acest motiv vom numi un astfel de grafic *arc de curbă netedă*[3].

Analog, schimbând rolul variabilelor, dacă $x = x(y)$, cu $y \in I$, este o funcţie de clasă C^1 pe I, atunci şi graficul său

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x = x(y),\ y \in I\},$$

este un arc de curbă netedă, iar ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ este

$$x - x_0 = x'(y_0)(y - y_0).$$

[3]În general, *netezimea* unei funcţii $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ este o măsură a ordinului de regularitate k dat de clasa C^k a funcţiei, gradul maxim de netezime fiind dat de clasa C^∞. Deoarece aici suntem interesaţi numai de existenţa tangentelor la curbă, gradul de netezime dat de clasa C^1 este suficient.

§3. Curbe plane definite implicit

Considerăm acum un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (o mulţime deschisă şi conexă), şi un *câmp scalar* F de clasă C^1 pe Ω, adică o funcţie $F : \Omega \to \mathbb{R}$ continuă care admite derivatele parţiale $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continue pe Ω.

Notăm cu $\vec{\nabla} F(x, y)$ *gradientul* lui F calculat în $(x, y) \in \Omega$, adică vectorul

$$\vec{\nabla} F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\vec{i}.$$

Problema 2. *Fie $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punct în care $F(x_0, y_0) = 0$. Arătaţi că dacă $\vec{\nabla} F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, atunci, într-o vecinătate a lui $M_0(x_0, y_0)$, mulţimea de nivel zero a lui F,*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega \ \mid F(x, y) = 0\},$$

este un arc de curbă netedă, iar gradientul $\vec{\nabla} F(x_0, y_0)$ este un vector perpendicular pe tangenta la curbă în $M_0(x_0, y_0)$.

Rezolvare. Deoarece $F(x_0, y_0) = 0$, rezultă că $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, prin urmare mulţimea Γ este nevidă. $\vec{\nabla} F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ însemnă că măcar una dintre derivatele parţiale $\frac{\partial F}{\partial x}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ nu se anulează în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Cazul I, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. În acest caz, din teorema funcţiilor implicite, rezultă că ecuaţia $F(x, y) = 0$ poate fi explicitată local sub forma $y = y(x)$, adică, pentru orice x dintr-un inteval $I_0 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ecuaţia admite o singură soluţie, notată $y = y(x)$, iar aplicaţia $x \to y(x)$ este de clasă C^1 pe I_0.

Notăm cu J_0 intervalul $J_0 = y(I_0)$ şi cu D_0 dreptunghiul $D_0 = I_0 \times J_0$. Deoarece pentru orice $(x, y) \in D_0$ are loc echivalenţa

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x),$$

rezultă că

$$\begin{aligned} \Gamma \cap D_0 &= \{(x, y) \in \Omega \cap D_0 \ \mid F(x, y) = 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \Omega \ \mid y = y(x), \quad x \in I_0\} = \Gamma_y, \end{aligned}$$

deci mulţimea Γ coincide, local, cu graficul Γ_y al funcţiei $y = y(x)$. Deoarece această funcţie este de clasă C^1, urmează că $\Gamma \cap D_0$ este un arc de curbă netedă.

Mai mult, derivând în raport cu x identitatea

$$F(x, y(x)) = 0, \ \forall x \in I_0,$$

obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}(x) = 0, \ \forall x,$$

de unde avem că funcţia $y = y(x)$ satisface ecuaţia diferenţială

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x, y(x)), \ \forall x \in I_0.$$

Ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ la Γ_y,

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

devine, în acest caz,

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(x_0, y_0)(x - x_0),$$

şi poate fi pusă sub forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Să observăm că, notând cu $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OM}$ şi $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} = \overrightarrow{OM_0}$ vectorii de poziţie ai punctelor $M(x, y)$ şi $M_0(x_0, y_0)$, ecuaţia tangentei poate fi scrisă cu ajutorul produsului scalar sub forma

$$\left\langle \vec{\nabla} F(x_0, y_0), \vec{r} - \vec{r}_0 \right\rangle = 0, \tag{9}$$

şi arată că grandientul lui F în punctul M_0 este perpendicular pe tangenta în M_0 la Γ, curba de nivel zero a lui F, prin urmare are direcţia normalei la curba Γ în punctul $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Cazul II, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Dacă (x_0, y_0) este un punct în care $F(x_0, y_0) = 0$ cu $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuaţia $F(x, y) = 0$ poate fi explicitată local ca $x = x(y)$, şi iarăşi Γ coincide local cu graficul unei funcţii de clasă C^1, deci admite tangentă în orice punct de pe acest grafic. Se arată uşor că ecuaţia tangentei poate fi pusă tot sub forma (8), în care variabilele x şi y au rol simetric.

Observaţie. Un punct $(x_0, y_0) \in \Omega$ se numeşte *punct critic* pentru câmpul scalar F dacă $\vec{\nabla} F(x_0, y_0) = \vec{0}$, altfel se numeşte *punct regulat.* Mai sus am arătat că, dacă un câmp scalar F de clasă C^1 nu are puncte critice, atunci mulţimea sa de nivel zero Γ este o *curbă netedă* în plan, deoarece ea coincide, în vecinătatea oricărui punct al său, cu un arc de curbă netedă. În acest caz, spunem că ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte în mod implicit curba Γ.

Mai mult, deoarece pentru orice constantă c, câmpurile scalare F şi $F + c$ au acelaşi gradient, rezultă că orice *mulţime de nivel constant*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega \ \mid F(x, y) = c\}$$

este o curbă netedă, iar gradientul lui F este ortogonal pe această curbă în orice punct al ei.

§4. Curbe definite parametric

Fie acum $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ două funcţii de clasă C^1 definite pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, cu valori reale. Ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \end{cases} \tag{10}$$

formează o *lege orară* de mişcare a punctului curent $M(x(t), y(t))$ în plan, iar vectorul

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

reprezintă vectorul viteză instantanee al punctului $M(x(t), y(t))$, viteză calculată în raport cu variabila t.

Problema 3. *Fie $t_0 \in I$ şi fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de coordonate $x_0 = x(t_0)$ şi $y_0 = y(t_0)$. Arătaţi că dacă $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$, atunci, într-o vecinătate I_0 a lui t_0, traiectoria mişcării,*

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \Omega \ \mid t \in I_0\},$$

este un arc de curbă netedă, iar vectorul viteză $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ este un vector director al tangentei la curbă în $M_0(x_0, y_0)$.

Rezolvare. Fie $t_0 \in I$ astfel $x'(t_0) \neq 0$. Din teorema de inversare locală rezultă că există un $\varepsilon > 0$ pentru care funcţia $x = x(t)$ restrânsă la intervalul

$$I_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

inversabilă, cu funcţia inversă, $t = t(x)$, tot de clasă C^1.

Notăm cu J_0 intervalul $J_0 = x(I_0)$, Deoarece pentru $t \in I_0$ şi $x \in J_0$ are loc echivalenţa

$$x = x(t) \Leftrightarrow t = t(x),$$

rezultă că

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{(x(t), y(t)) \ \mid \ t \in I_0\} = \\ &= \{(x, y(t(x)) \ \mid \ x \in J_0\} = \Gamma_{\tilde{y}},\end{aligned}$$

deci traiectoria Γ coincide, local, cu graficul $\Gamma_{\tilde{y}}$ al funcţiei $y = \tilde{y}(x) = y(t(x))$. Deorece această funcţie este de clasă C^1, urmează că Γ este un arc de curbă netedă.

Pentru a afla ecuaţia tangentei, derivăm şi obţinem

$$\frac{d\tilde{y}}{dx}(x) = \frac{dy}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x) = \frac{\dfrac{dy}{dt}(t(x))}{\dfrac{dx}{dt}(t(x))} = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))}, \ \forall x \in J_0.$$

Aici am folosit formula de derivare a funcţiei inverse

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}(t(x))}, \ \forall x \in J_0.$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $y = \tilde{y}(x) = y(t(x))$ în $M_0(x_0, y_0)$ de pe grafic, cu $x_0 = x(t_0)$ şi $y_0 = y(t_0) = y(t(x_0)) = \tilde{y}(x_0)$, este

$$y - y_0 = \frac{d\tilde{y}}{dx}(x_0)(x - x_0),$$

şi acum devine

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0)$$

adică

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}. \tag{11}$$

Observăm că ecuaţia tangentei, scrisă sub forma (11), exprimă faptul că vectorul viteză

$$\vec{v}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$$

este coliniar cu vectorul

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$$

pentru orice punct M de pe tangentă, deci $\vec{v}(t_0)$ este un vector director al acestei drepte.

Dacă în punctul iniţial $t_0 \in I$ avem $x'(t_0) = 0$, atunci, în ipotezele date, rezultă că $y'(t_0) \neq 0$ şi se repetă raţionamentul anterior, cu y în loc de x. Se obţine că mişcarea iarăşi are loc, local, pe graficul unei funcţii de clasă C^1, acum de forma $x = x(y)$, iar ecuaţia tangentei la acest grafic poate fi pusă, din nou, sub forma (11).

Observaţie. Dacă viteza punctului $M(x(t), y(t))$ dat de ecuaţiile de mişcare (10) nu se anulează în nici un $t \in I$, atunci traiectoria sa este o curbă netedă în plan. In acest caz, spunem că am definit curba prin ecuaţiile parametrice (10).

Atragem atenţia că o curbă Γ, definită aici ca o mulţime de puncte, poate fi parametrizată în mai multe moduri, iar acolo unde este important de ştiut în ce sens se mişcă punctul curent pe curbă, sau de câte ori trece prin acelaşi loc, (de exemplu la calculul integralelor curbilinii), se introduce o relaţie de echivalenţă între parametrizări, iar prin curbă se înţelege o clasă de parametrizări de echivalente, care provin una din alta printr-o schimbare bijectivă, bicontinuă şi strict crescătoare de variabilă.

Dintre cele trei modalităţi de definire a unei curbe plane prezentate aici, primele două sunt specifice cazului plan, bidimensional, în timp ce ultima, definirea prin ecuaţii parametrice, poate fi utilizată pentru curbe în spaţii multidimensionale, dar aceasta este o altă discuţie.

§5. Aplicaţii

Exerciţiul 1. *Să se reprezinte grafic locul geometric al punctelor $M(x, y)$ pentru care produsul dintre distanţa până la origine şi distanţa până la dreapta Δ de ecuaţie $x = -1$ este egal cu 1.*

Rezolvare. Cu notaţiile din Figura 6 avem

$$MO \cdot MN = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |x + 1| = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{(1 - x - x^2)(1 + x + x^2)}}{x + 1}.$$

Exerciţiul 2. *Curba reprezentată în Figura 3 se numeşte spirala logaritmică şi are ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = e^{at} \cos bt, \\ y = e^{at} \sin bt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cu a şi b parametri reali. Arătaţi că unghiul dintre tangenta la curbă în orice punct M al său şi raza vectoare OM este constant.

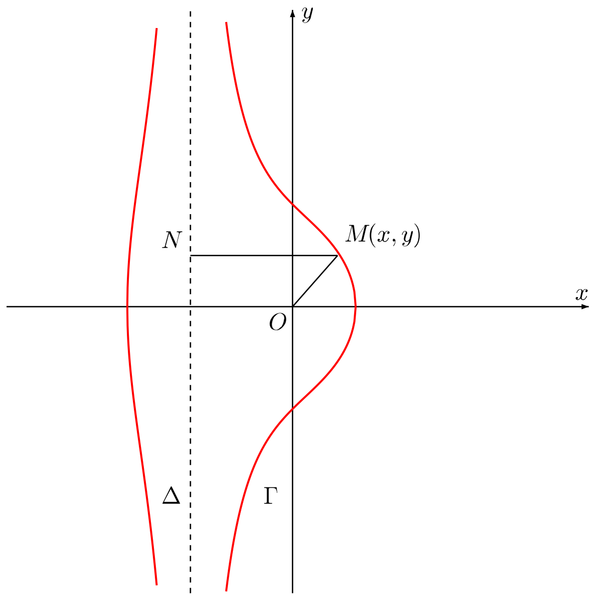

Figura 6: $MO \cdot MN = 1$

Rezolvare. Notăm cu φ unghiul dintre vectorii $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ şi $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Se arată prin calcul că

$$\cos\varphi = \frac{<\vec{v}, \vec{r}>}{|\vec{v}||\vec{r}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const.}$$

Exerciţiul 3. *Se consideră curba Γ dată de ecuaţiile parametrice*

$$(\Gamma)\ \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) *Arătaţi că Γ este o curbă algebrică de grad 4, adică are o ecuaţie implicită $F(x, y) = 0$ cu F un polinom de grad 4;*

b) *Reprezenaţi grafic curba Γ ca reuniune de arce explicitate $x = x(y)$;*

c) *Reprezenaţi grafic curba ca reuniune de arce explicitate $y = y(x)$;*

d) *Scrieţi ecuaţia tangentei în punctele în care Γ intersectează prima bisectoare;*

e) *Determinaţi punctele de pe curbă în care tangenta are panta $\frac{1}{2}$;*

Rezolvare 1. *a*) Din $x = \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2y\cos t$ rezultă $\cos t = \frac{x}{2y}$, iar din $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ obţinem ecuaţia implicită a curbei Γ

$$4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0.$$

b) Rezolvăm ecuaţia de mai sus în necunoscuta y. Obţinem $x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}$, deci Γ este formată din două arce simetrice în rapot cu axa Oy.

Studiem funcţia

$$x(y) = 2y\sqrt{1-y^2}, \quad y \in [-1, +1].$$

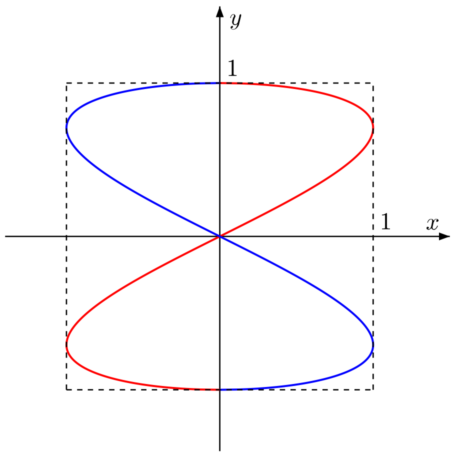

Figura 7: $x(y) = \pm 2y\sqrt{1-y^2}$

Calculăm derivata

$$x'(y) = \frac{2(1-2y^2)}{\sqrt{1-y^2}},$$

şi obţinem următorul tabel de variaţie:

y	\\\\\	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$	\\\\\
$x'(y)$	\\\\\	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$	\\\\\
$x(y)$	\\\\\	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	-1	$\searrow$	0	\\\\\

În Figura 7, graficul $x = 2y\sqrt{1-y^2}$ este reprezentat cu roşu, iar graficul $x = -2y\sqrt{1-y^2}$ cu albastru.

c) Rezolvăm ecuaţia bipătrată $4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$ în necunoscuta y şi obţinem

$$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{2}}.$$

Cele patru grafice $x = y_{1,2,3,4}(x)$ sunt redate cu culori diferite în Figura 8.

d) Gradientul lui F este

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} = 2x\vec{i} + (16y^3 - 8y)\vec{i},$$

deci ecuaţiea tangentei într-un punct regulat $(x_0, y_0) \in \Gamma$ este

$$2x_0(x - x_0) + (16y_0^3 - 8y_0)(y - y_0) = 0.$$

Punctele de intersecţie cu prima bisectoare le găsim rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0, \\ y = x. \end{cases}$$

şi găsim trei puncte: $M_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $O(0,0)$.

Pentru tangenta în $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ obţinem ecuaţia

$$x + 2y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0,$$

iar pentru $M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$x + 2y + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$$

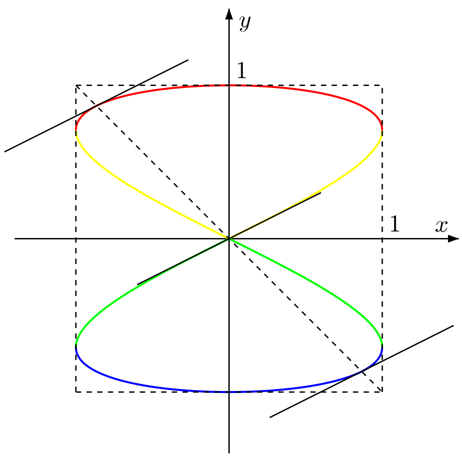

Figura 8: $y(x) = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{2}}$

În punctul $O(0,0)$ gradientul lui F se anulează, nu putem folosi rezultatele stabilite pentru puncte regulate, observăm totuşi că originea este un punct de autointersecţie a curbei Γ, în care se intersectează arcul neted

$$x = x_1(x) = 2y\sqrt{1-y^2}$$

cu arcul

$$x = x_2(x) = -2y\sqrt{1-y^2}.$$

Tangenta la primul arc în $y_0 = 0$ are ecuaţia

$$x - 0 = x_1'(0)(y-0) \quad\Leftrightarrow\quad x - 2y = 0,$$

iar la al doilea arc

$$x - 0 = x_2'(0)(y-0) \quad\Leftrightarrow\quad x + 2y = 0$$

e) Vom folosi ecuaţiile parametrice. Avem

$$\begin{cases} x'(t) = 2\cos 2t, \\ y'(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Panta tangentei la momentul t este

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{2\cos 2t},$$

astfel că avem de rezolvat ecuaţia

$$\frac{\cos t}{2\cos 2t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos t = 2(2\cos^2 t - 1),$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \ \text{ sau } \ \cos t = -\frac{1}{2}.$$

În primul caz, $\cos t_1 = 1$ implică $t_1 = 2k\pi$ şi, prin urmare, obţinem punctul $O(0,0)$, iar în al doilea caz, $\cos t_2 = -\frac{1}{2}$ implică

$$x(t_2) = 2\sin t_2 \cos t_2 = -\sin t_2 = -y(t_2),$$

deci găsim cele două puncte de intersecţie cu a doua bisectoare, altele decât $O(0,0)$, şi anume

$$M_{3,4}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

În Figura 8 sunt trasate şi cele trei tangente de pantă $m = -\frac{1}{2}$.