Tutorial 2. Derivarea = integrarea^{-1}

Dorim să evidenţiem aici faptul că derivarea şi integrarea funcţiilor reale sunt operaţii inverse, într-un sens care urmează a fi precizat.

Incepem prin a reaminti *formula Leibniz-Newton* pentru funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ continue pe un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$: *dacă funcţia F este o primitivă a lui f, mai precis dacă $F \in C^1(I, \mathbb{R})$ şi $F' = f$, atunci pentru orice $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a). \tag{1}$$

In mod uzual, stabilirea formulei (1) are loc în trei paşi: primul, cel mai dificil, constă în a demonstra

Teorema 1. *Orice funcţie continuă pe un interval $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[\,a, b\,]$.*

In pasul doi se arată că integrala ca funcţie de limita superioară este o primitivă a integrantului:

Teorema 2. *Fie $t_0 \in I$ fixat arbitrar. Dacă f este continuă pe I, atunci funcţia $\Phi : I \to \mathbb{R}$ dată de*

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds, \tag{2}$$

este bine definită pentru orice $t \in I$, este derivabilă şi

$$\Phi'(t) = f(t), \tag{3}$$

pentru orice $t \in I$.

Justificare. Pentru orice $t \in I$ avem

$$\Phi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{t_0}^{t+h} f(s)ds - \int_{t_0}^t f(s)ds \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds.$$

Din teorema de medie pentru integrala Riemann a unei funcţii continue rezultă că pentru orice $h \neq 0$ există τ_h între t şi $t + h$ astfel încât

$$\int_t^{t+h} f(s)ds = f(\tau_h)(t + h - t) = f(\tau_h)h$$

şi, prin urmare, ţinând cont de continuitatea lui f,

$$\Phi'(t) = \lim_{h \to 0} f(\tau_h) = f(t).$$

Observaţie. Funcţia Φ este primitiva lui f care satisface condiţia $\Phi(t_0) = 0$.

In sfârşit, la pasul trei stabilim formula Leibniz-Newton astfel: fie F o primitivă a funcţiei continue f. Fixăm un $t_0 \in I$ şi folosim funcţia Φ definită de (2). Din $(F - \Phi)' = f - f = 0$ urmează că $F = \Phi + c$, unde c este o constantă, de unde obţinem

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_{t_0}^b f(s)ds - \int_{t_0}^a f(s)ds = \int_a^b f(s)ds.$$

Am demonstrat astfel formula Leibniz-Newton (1) pe care acum o scriem într-o formă în care nu mai apare funcţia iniţială f.

Teorema 3. *Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe intervalul deschis $I \subset \mathbb{R}$ atunci*

$$\int_a^b \frac{dF}{ds}(s)ds = F(b) - F(a), \tag{4}$$

pentru orice a, $b \in I$.

Prin eliminarea funcţiei Φ din relaţiile (2) şi (3) obţinem identitatea

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^t f(s)ds = f(t), \tag{5}$$

pentru orice $t \in I$.

Evidenţiem astfel faptul că integrarea şi derivarea sunt operaţii inverse, în următorul sens: *derivata integralei ca funcţie de limita superioară este chiar funcţia integrată*, vezi relaţia (5), iar *integrala derivatei unei funcţii este egală cu diferenţa valorilor funcţiei în capetele intervalului*, vezi relaţia (4).

Să observăm că metoda de calcul a integralei definite bazată pe formula Leibniz-Newton este varianta infinitezimală a *metodei sumelor telescopice*: dacă avem de calculat suma

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i$$

vom căuta un şir (F_i) astfel încât sa avem descompunerea

$$f_i = \Delta F_i = F_i - F_{i-1},\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

şi atunci

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i = (F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \cdots + (F_n - F_{n-1}) = F_n - F_0,$$

altfel scris

$$\Sigma_{i=1}^{i=n}(\Delta F_i) = F_n - F_0. \tag{6}$$

Exemplu. Suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

poate fi calculată cu descompunerea

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

astfel

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Am arătat că

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}, \tag{7}$$

pentru orice $n \geq 1$.

Analogia dintre formulele (4) şi (6) nu este întâmplătoare, ea conduce la următoarea demonstraţie directă a Teoremei 3: fie

$$s_0 = a < s_1 < \cdots < s_n = b$$

o diviziune oarecare a intervalului $[\,a, b\,]$. Aplicând teorema creşterilor finite pe fiecare subinterval $[\,s_{i-1}, s_i\,]$ obţinem existenţa punctelor $\sigma_i \in [\,s_{i-1}, s_i\,]$ în care

$$\frac{dF}{ds}(\sigma_i) = \frac{F(s_i) - F(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} = \frac{\Delta F(s_i)}{\Delta s_i},$$

pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$. Suma Riemann corespunzătoare acestor puncte intermediare devine o sumă telescopică şi poate fi calculată:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{ds}(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta F(s_i)}{\Delta s_i} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta F(s_i) = F(b) - F(a).$$

Funcţia $\frac{dF}{ds}$ este integrabilă fiind continuă, există deci integrala

$$\int_a^b \frac{dF}{ds}(s)ds = I \in \mathbb{R}$$

şi, deoarece pentru orice diviziune a intervalului $[\,a, b\,]$, oricât de fină, se pot alege punctele intermediare astfel încât suma Riemann corespunzătoare lor să fie egală cu $F(b) - F(a)$, rezultă egalitatea dorită, $I = F(b) - F(a)$.

Demonstraţia de mai sus justifică următorul *calcul formal* în care simplificăm cu ds:

$$\int_a^b \frac{dF}{ds}\, ds = \int_a^b dF = F(b) - F(a).$$

Să observăm acum că şi formula (5) are un analog discret, şi anume *principiul de sumare*: suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} f_i = f_1 + \cdots + f_n$$

se calculează prin relaţia de recurenţă

$$S_n = S_{n-1} + f_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

cu $S_0 = 0$, relaţie care poate fi scrisă sub forma $S_n - S_{n-1} = f_n$, adică

$$\Delta(\Sigma_{i=1}^{i=n} f_i) = f_n. \tag{8}$$

Exemplu. Să verificăm relaţia precedentă pentru suma (7). Avem

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = f_n$$

pentru orice $n \geq 1$ şi $S_0 = 0$, de unde, la nevoie, se poate trage concluzia că propoziţia (7) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Observaţie. In cele două exemple de mai sus am găsit pentru şirul $f_i = \frac{1}{i(i+1)}$ două *primitive discrete*: şirurile $F_i = -\frac{1}{i+1}$ şi $S_i = \frac{i}{i+1}$, despre care am arătat că $\Delta F_i = \Delta S_i = f_i$, pentru orice $i \geq 1$. Să vedem dacă diferenţa lor este o constantă. Intr-adevăr, avem

$$S_i - F_i = \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1} = 1,$$

pentru orice $i \in \mathbb{N}$.