Tutorial 3. Funcţia exponenţială

Deoarece funcţia exponenţială joacă un rol foarte important în teoria ecuaţiilor diferenţiale, vom prezenta aici o modalitate de definire riguroasă a ei. Mai mult, această definiţe poate fi extinsă, după cum vom vedea mai târziu, la cazul funcţiilor matriceale (şi nu numai).

Fie $a > 0$ un număr real fixat arbitrar. După cu ştim, puterile cu exponent natural nenul ale lui a se definesc prin repetarea înmulţirii

$$a^n \overset{\text{def}}{=} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ de } n \text{ ori}, \tag{1}$$

şi au proprietatea fundamentală

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{2}$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$. Puterile cu exponent întreg se definesc astfel încât egalitatea de mai sus să fie respectată pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$. In acest caz, din $a = a^{1+0} = aa^0$ rezultă $a^0 = 1$, iar din $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n a^{-n}$ urmează că $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Extindem deci definiţia (1) cu $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ şi $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$ pentru orice $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, şi observăm imediat că egalitatea (2) are loc pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$.

Mai departe, definim puterile cu exponent raţional astfel încât egalitatea (2) să fie iarăşi satisfăcută, acum pentru orice $m, n \in \mathbb{Q}$. Pentru început, să observăm că pentru orice exponent natural fixat $n \in \mathbb{N}^*$, *funcţia putere*

$$a \in (0, +\infty) \to \alpha = a^n \in (0, +\infty)$$

este bijectivă, şi definim *funcţia radical* ca fiind inversa funcţiei putere:

$$\alpha = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{\alpha}.$$

Acum, cu raţionamente de forma

$$a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = a^2 \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2},$$

ajungem la definiţia bine-cunoscută

$$a^{\frac{p}{q}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[q]{a^p},$$

pentru orice $p \in \mathbb{Z}$ şi $q \in \mathbb{N}^*$. Am construit astfel, din aproape în aproape, *funcţia exponenţială de argument raţional*

$$x : \mathbb{Q} \to (0, +\infty), \quad x(t) = a^t = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ pentru } t = \frac{p}{q}, \tag{3}$$

care verifică ecuaţia

$$x(t + s) = x(t)x(s), \tag{4}$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{Q}$ şi, în plus, satisface condiţia

$$x(1) = a. \tag{5}$$

Pentru a defini puterile lui a cu exponent real, vom arăta că funcţia (3) poate fi prelungită prin continuitate, în mod unic evident, la $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

O cale ar fi să stabilim continuitatea funcţiei (3) pe $\mathbb{Q}$ şi apoi să arătăm că, pentru orice $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, există şi este finită limita

$$\lim_{r \to t} a^r \stackrel{\text{def}}{=} x(t),$$

dar preferăm să păstrăm abordarea de la extinderele precedente: vom arăta mai întâi că există o funcţie continuă (chiar analitică) $x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, care verifică *ecuaţia funcţională* (4) pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$ şi satisface *condiţia iniţială* (5), şi apoi vom observa că, prin raţionamente de tipul

$$x(2) = x(1+1) = x(1)x(1) = x^2(1),$$

ş.a.m.d., se deduce pas cu pas că

$$x(t) = (x(1))^t, \tag{6}$$

pentru orice $t \in \mathbb{Q}$. Cum $x(1) = a$, rezultă că $x = x(t)$ este prelungirea căutată.

Avem de rezolvat deci

Problema 1. Să se determine toate soluţiile ecuaţiei funcţionale (4) în clasa funcţiilor analitice[1] pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare. I. *Forma soluţiei.* Fie $x = x(t)$ o soluţie analitică a ecuaţiei (4). Din $x(t) = x(t+0) = x(t)x(0)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, rezultă $x(0) = 0$ sau $x(0) = 1$. In primul caz rezultă că x este funcţia nulă, care verifică ecuaţia dar care nu ne interesează, aşa că în continuare vom considera cazul $x(0) = 1$.

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$x'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{x(t+s) - x(t)}{s} =$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{x(t)x(s) - x(t)x(0)}{s} = x(t) \lim_{s \to 0} \frac{x(s) - x(0)}{s} = x(t)x'(0).$$

Notăm $\lambda = x'(0) \in \mathbb{R}$ şi observăm că funcţia $x = x(t)$ este o soluţie a *ecuaţiei diferenţiale*

$$x'(t) = \lambda x(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

care satisface *condiţia iniţială*

$$x(0) = 1. \tag{8}$$

Vom arăta că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, problema dată de relaţiile (7) şi (8) admite o soluţie analitică $x = x_\lambda(t)$ pe care o vom căuta sub forma seriei de puteri

$$x_\lambda(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots . \tag{9}$$

Derivăm seria (9) termen cu termen

$$x'_\lambda(t) = 1a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots$$

[1] Amintim că o funcţie $x : I \to \mathbb{R}$, cu I un interval, este *analitică* pe I dacă este de clasă C^∞ pe I şi este dezvoltabilă în serie Taylor în orice $t \in I$.

şi, după ce o introducem în ecuaţia (7) şi identificăm coeficienţii, obţinem relaţiile

$$1a_1 = \lambda a_0,\ 2a_2 = \lambda a_1,\ 3a_3 = \lambda a_2,\ \ldots$$

de unde urmează că

$$a_n = \frac{\lambda^n}{n!} a_0,\ \text{pentru orice } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

In final, din $a_0 = x(0) = 1$ urmează că

$$x_\lambda(t) = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \frac{\lambda^4 t^4}{4!} + \cdots. \tag{10}$$

Calculăm raza de convergenţă:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{\lambda}{n+1} = 0,$$

şi obţinem $\rho = +\infty$. Urmează că funcţia $x = x_\lambda(t)$ este bine definită de relaţia (10) pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi, mai mult, este de clasă C^∞, ca sumă a unei serii de puteri. Până acum am arătat că, în clasa funcţiilor analitice, problema (7) şi (8) are cel mult o soluţie.

II. *Verificare.* Considerăm acum funcţia $x = x_\lambda(t)$ ca fiind definită de relaţia (10) şi observăm uşor, prin derivare termen cu termen, că ea verifică ecuaţia diferenţială (7) şi condiţia iniţială (8). Vom dovedi prin calcul direct că ea verifică şi ecuaţia funcţională (4). Aplicăm teorema lui Mertens pentru produsul după Cauchy a două serii şi, folosind formula binomului lui Newton, obţinem:

$$x_\lambda(t)x_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \frac{\lambda^{n-k} s^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k t^k s^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (t+s)^n = x_\lambda(t+s)$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$, deci $x = x_\lambda(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (4).

A mai rămas de arătat că $x = x_\lambda(t)$ este funcţie analitică pe $\mathbb{R}$. Pentru aceasta vom defini mai întâi *funcţia exponenţială*

$$\exp t \stackrel{\text{def}}{=} x_{\lambda=1}(t),$$

adică

$$\exp t \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots, \tag{11}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, şi observăm că

$$x_\lambda(t) = \exp \lambda t, \tag{12}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Ştim deja că $\exp' t = \exp t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, prin urmare $\exp^{(n)} t = \exp t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că pe orice interval compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$

derivatele funcţiei $x = \exp t$ sunt uniform mărginite în raport cu n şi t, de unde tragem concluzia că funcţia exponenţială $x = \exp t$ este analitică pe $\mathbb{R}$ şi, odată cu ea, toate funcţiile $x_\lambda(t) = \exp \lambda t$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Am rezolvat **Problema 1**, mai rămâne să arătăm că pentru orice $a > 0$ există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $x = x_\lambda(t)$ să verifice condiţia (5). Din (12) rezultă echivalenţa

$$x_\lambda(1) = a \Leftrightarrow \exp \lambda = a, \tag{13}$$

şi astfel avem acum de rezolvat

Problema 2. Să se arate că funcţia $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definită de formula (11) este bijectivă, cu inversa derivabilă.

Rezolvare. Din (11) este evident că $\lim_{t\to+\infty} \exp t = +\infty$ şi, prin urmare, ţinând cont de (4), avem $\lim_{t\to-\infty} \exp t = \lim_{t\to+\infty} \exp(-t) = \frac{1}{+\infty} = 0$. Analog, $\exp t > 0$ pentru $t \geq 0$ şi $\exp t = \frac{1}{\exp(-t)} > 0$ pentru $t < 0$. Urmează că $\exp' t = \exp t > 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, deci funcţia este strict crescătoare şi continuă, prin urmare este bijectivă de la $\mathbb{R}$ la $\exp(\mathbb{R}) = (\exp(-\infty), \exp(+\infty)) = (0, +\infty)$.

Definim funcţia *logaritm natural* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ca fiind inversa funcţiei exponenţiale $x = \exp t$, adică prin echivalenţa

$$\exp t = x \Leftrightarrow t = \ln x,$$

pentru $t \in \mathbb{R}$ şi $x \in (0, +\infty)$. Deoarece derivata funcţiei directe $x = \exp t$ nu se anulează nicăieri, sunt îndeplinite, în vecinătatea oricărui $t \in \mathbb{R}$, ipotezele teoremei de inversare locală, de unde rezultă că funcţia inversă $t = \ln x$ este derivabilă. Mai mult, derivând în raport cu variabila x identitatea

$$x = \exp(\ln x),\ \text{pentru orice } x \in (0, +\infty),$$

obţinem

$$1 = \exp'(\ln x) \ln' x = \exp(\ln x) \ln' x = x \ln x,$$

şi deci

$$\ln' x = \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

Echivalenţa (13) poate fi continuată acum astfel

$$x_\lambda(1) = a \Leftrightarrow \exp \lambda = a \Leftrightarrow \lambda = \ln a, \tag{14}$$

şi, în consecinţă, am arătat că, pentru orice $a > 0$, funcţia $x_\lambda(t) = \exp \lambda t$ cu $\lambda = \ln a$ este o soluţie continuă pe $\mathbb{R}$ a ecuaţiei funcţionale (4) care satisface condiţia iniţială (5), aşadar ea este unica prelungire prin continuitate a funcţiei $t \in \mathbb{Q} \to a^t \in (0, +\infty)$. Din acest motiv ea este notată tot cu a^t şi deci, prin definiţie

$$a^t \stackrel{\text{def}}{=} x_{\ln a}(t) = \exp(t \ln a), \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

In final, definim *numărul lui Euler*, e, prin

$$\ln e \stackrel{\text{def}}{=} 1 \Leftrightarrow e \stackrel{\text{def}}{=} \exp 1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots, \tag{16}$$

şi observăm că, din (15), urmează

$$\exp t = e^t,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, altfel spus, funcţia $x = \exp t$ este prelungirea prin continuitate a funcţiei $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \to e^t = \sqrt[q]{e^p} \in (0, +\infty)$.

In concluzie, pentru orice $a > 0$, funcţia exponenţială $x(t) = a^t$ se defineşte prin egalitatea

$$a^t = e^{t \ln a},$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots, \; t \in \mathbb{R},$$

iar funcţia $t = \ln x$ este inversa funcţiei $x = e^t$.