Tutorial 4. Funcţiile circulare sinus şi cosinus

Funcţiile trigonometrice se mai numesc şi *funcţii circulare* deoarece definiţiile lor clasice, date pentru unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic, au fost extinse la unghiuri de orice mărime cu ajutorul cercului de rază 1 centrat în origine, $\mathscr{C}(\mathrm{O}, 1)$, numit *cercul trigonometric.*

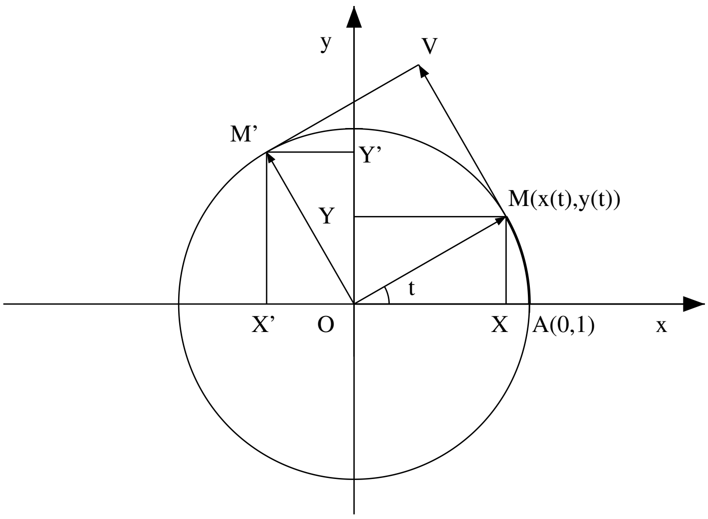

Figura 1.

Notăm cu $A(0,1)$ intersecţia cercului trigonometric cu semiaxa Ox şi considerăm un punct $M \in \mathscr{C}(\mathrm{O}, 1)$ situat în primul cadran, având proiecţiile X şi Y pe axele de coordonate. Notăm cu t măsura unghiului $\sphericalangle AOM$ care, după cum se ştie, este prin definiţie egală cu măsura arcului $\widehat{AM}$.

Poziţia lui M pe cercul $\mathscr{C}(\mathrm{O}, 1)$ este unic determinată de mărimea lui t, din acest motiv considerăm coordonatele lui M ca funcţii de t şi le notăm cu $x = x(t)$ şi $y = y(t)$, adică $M = M(x(t), y(t))$.

În cazul în care $\sphericalangle AOM$ este un unghi ascuţit, aplicând în triunghiul dreptunghic ΔOXM definiţiile clasice, obţinem

$$\cos t = \frac{OX}{OM} = \frac{OX}{1} = x(t),$$

şi

$$\sin t = \frac{OY}{OM} = \frac{OY}{1} = y(t).$$

Aceste relaţii au fost luate ca definiţii ale funcţiilor sinus şi cosinus pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Mai precis,

$$\begin{cases} \cos t \overset{def}{=} x(t), \\ \sin t \overset{def}{=} y(t), \end{cases} \tag{1}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt coordonatele punctului $M = M(x(t), y(t))$ corespunzător lui $t \in \mathbb{R}$ pe cercul trigonometric parcurs în sens antiorar.

Din definiţia (1) deducem imediat că funcţiile sinus şi cosinus sunt periodice şi au valorile în intervalul $[-1, 1]$. Pentru a determina, prin calcul, aceste valori avem nevoie de două ecuaţii.

Prima ecuaţie este imediată: $M \in \mathscr{C}(\mathrm{O}, 1)$ însemnă $OM = 1$, adică

$$x^2(t) + y^2(t) = 1, \tag{2}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Pentru a obţine o a doua ecuaţie, notăm cu $s(t)$ lungimea arcului $\widehat{AM}$ şi observăm că mărimile t şi $s(t)$ sunt direct proporţionale, ceea ce înseamnă că există $k > 0$ astfel încât

$$s(t) = kt,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Dacă măsurăm unghiurile în gradele sexazecimale, pentru $\tilde{t} = 360°$ arcul $\widehat{AM}$ corespunzător acoperă tot cercul, deci $s(\tilde{t}) = 2\pi r = 2\pi$ şi obţinem

$$k = \frac{s(\tilde{t})}{\tilde{t}} = \frac{2\pi}{360},$$

de unde rezultă că

$$s(t) = \frac{2\pi}{360} t,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Se poate continua şi aşa, dar această valoare a constantei k complică mult calculele care urmează. Din acest motiv, în secolul al XIX-lea, s-a introdus o nouă unitate de măsură a unghiurilor, şi anume radianul, special aleasă pentru a avea $k = 1$.

După cu se ştie, radianul este unghiul la centru care subîntinde un arc de lungime egală cu raza cercului. Aşadar, pentru $t_1 = 1$ rad, lungimea $s(t_1)$ a arcului $\widehat{AM_1}$ corespunzător este egală cu $r = 1$, prin urmare $k = \frac{s(t_1)}{t_1} = 1$ şi avem egalitatea

$$s(t) = t, \tag{3}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Altfel spus, pe cercul de rază 1, lungimea oricărui arc este numeric egală cu măsura sa în radiani.

În continuare vom măsura unghiurile numai în radiani, cum de altfel se procedează în toată analiza matematică.

Ca să putem efectua calculele, vom presupune că funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt analitice pe $\mathbb{R}$ şi, după ce le vom determina, vom arăta că ele au proprietăţile definitorii date de relaţiile (2) şi (3).

În aceste ipoteze, lungimea arcului $\widehat{AM}$ se calculează cu integrala

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} ds,$$

de unde, derivând şi ţinând cont de (2) obţinem

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 1, \tag{4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Interpretarea cinematică a relaţiilor de mai sus este simplă: dacă considerăm t ca fiind timpul, atunci punctul $M(x(t), y(t))$ se mişcă uniform (adică cu viteză constantă în modul) pe cercul $\mathscr{C}(\mathrm{O}, 1)$. Relaţia (2) arată că vectorul său de poziţie

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

are modulul constant egal cu 1, iar (4) arată că şi vectorul viteză

$$\vec{v} = \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{OM'} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

are modulul 1 pentru orice t.

Derivând relaţia (2) obţinem

$$\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0, \tag{5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică $\vec{r} \perp \vec{v}$, aşa cum era de aşteptat: se ştie că vectorul viteză are direcţia tangentă la traiectorie, iar tangenta la un cerc este perpendicuară pe raza dusă în punctul de contact.

Din (2), (4) şi (5) deducem că în Figura 1 paralelogramul $OMVM'$ este un pătrat, urmează că triunghiul $\Delta OY'M'$ poate fi obţinut prin rotirea în sens trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$ radiani a triunghiului ΔOXM, şi cum M' este punctul de coordonate $(x'(t), y'(t))$, obţinem egalităţile

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t), \end{cases} \tag{6}$$

valabile pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Să observăm că la momentul iniţial $t = 0$ avem $M = A$, adică $x(0) = 1$ şi $y(0) = 0$.

Din (6) deducem imediat că atât $x = x(t)$, cât şi $y = y(t)$, verifică egalitatea

$$u''(t) = -u(t), \tag{7}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, numai valorile iniţiale fiind diferite:

$$x(0) = 1,\ x'(0) = -y(0) = 0$$

şi, respectiv

$$y(0) = 0,\ y'(0) = x(0) = 1.$$

Rezolvăm ecuaţia diferenţială (7) căutând funcţia necunoscută sub forma unei serii de puteri

$$u(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$$

Derivăm termen cu termen, avem

$$u'(t) = 1a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \dots$$

şi

$$u''(t) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 t + 3 \cdot 4a_4 t^2 + 4 \cdot 5a_5 t^3 \dots$$

Introducem aceste serii în ecuaţia (7) şi indentificăm coeficienţii, obţinem relaţiile

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{1\cdot 2} a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3} a_1 \\ a_4 = -\frac{1}{3\cdot 4} a_2 \\ a_5 = -\frac{1}{4\cdot 5} a_3 \\ \dots \end{cases} \tag{8}$$

În cazul $u = x$ avem $a_0 = x(0) = 1$ şi $a_1 = x'(0) = 0$ de unde, rezolvând sistemul (8) din aproape în aproape, deducem în final că funcţia $x = x(t)$ are forma

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots \tag{9}$$

Analog, pentru $u = y$ avem $a_0 = y(0) = 0$ şi $a_1 = y'(0) = 1$ şi obţinem

$$y(t) = \frac{1}{1!}t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots \tag{10}$$

Pentru a determina raza de convergenţa a seriei (9) notăm $s = -t^2$ şi obţinem seria de puteri

$$1 + \frac{1}{2!}s + \frac{1}{4!}s^2 + \frac{1}{6!}s^3 + \dots$$

pentru care

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

şi deci $\rho = \infty$ atât pentru seria în s cât şi pentru cea iniţială. Un calcul asemănător ne arată că şi seria (10) este convergentă pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Am arătat până acum că, dacă $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt analitice pe $\mathbb{R}$ şi verifică relaţiile (2) şi (3), atunci ele au forma (9) şi (10).

Reciproc, considerăm acum că $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt definite de seriile de puteri (9) şi (10), despre care ştim că au raza de puteri infinită. Rezultă că $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt indefinit derivabile pe $\mathbb{R}$ şi pot fi derivate termen cu termen. Derivând seria (9) obţinem

$$x'(t) = 0 - \frac{1}{2!} \cdot 2t + \frac{1}{4!}4 \cdot t^3 - \frac{1}{6!}6 \cdot t^5 + \dots =$$
$$-\frac{1}{1!}t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{7!}t^7 - \dots = -y(t)$$

şi, analog, prin calcul direct,

$$y'(t) = x(t)$$

pentru orice t. Am arătat că funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale (6). Să observăm că sunt verificate şi condiţiile iniţiale $x(0) = 1$ şi $y(0) = 0$.

Pentru a verifica relatia (2), calculăm

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = -2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0,$$

pentru orice t, deci

$$x^2(t) + y^2(t) = \text{const.} = x^2(0) + y^2(0) = 1,$$

de unde urmează şi

$$x'^2(t) + y'^2(t) = (-y(t))^2 + (x(t))^2 = x^2(t) + y^2(t) = 1,$$

pentru orice t.

Din ultima relaţie deducem că $s'(t) = 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, de unde urmează că $s(t) = t+c$, cu c o constantă pe care o determinăm ţinând cont că $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ implică $s(0) = 0$, şi prin urmare $c = 0$.

Am arătat astfel că funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ definite de seriile de puteri (9) şi (10) verifică relaţiile (2) şi (3), deci punctul $M(x(t), y(t))$ este, pentru fiecare t, chiar punctul corespunzător lui t pe cercul trigonometric şi atunci coordonatele lui sunt $x = \cos t$ şi $y = \sin t$.

În concluzie, funcţiile circulare cosinus şi sinus se definesc pe cercul trigonometric ca fiind coordonatele punctului M corespunzător unghiului $\sphericalangle AOM$. Dacă notăm cu t măsura în radiani a unghiului $\sphericalangle AOM$, atunci

$$\begin{cases} \cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} - \dfrac{t^6}{6!} + \dots \\ \\ \sin t = \dfrac{t}{1!} - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} - \dfrac{t^7}{7!} + \dots, \end{cases}$$

şi, mai mult, au loc următoarele formule de derivare

$$\begin{cases} \cos' t = -\sin t \\ \sin' t = \cos t, \end{cases}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Celelalte proprietăţi ale funcţiilor circulare, cum ar fi formulele

$$\begin{cases} \sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s \\ \cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s, \end{cases}$$

de exemplu, pot fi demonstrate folosind definiţiile lor clasice sau, mult mai elegant, folosind *formula lui Euler*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

dar pentru aceasta va trebui să definim riguros, într-un alt tutorial, funcţia exponenţială în mulţimea numerelor complexe.