Tutorial 5. Principiul contracţiilor

Principiul contracţiilor este o abstractizare a *metodei aproximaţiilor succesive*, metodă utilizată în mod empiric încă din antichitate pentru rezolvarea ecuaţiilor numerice, şi care a fost utilizată cu succes, de exemplu, şi de către Johannes Kepler în 1621 la determinarea poziţiei planetelor pe orbită, rezolvând în mod iterativ ecuaţia care astăzi îi poartă numele[1]:

$$E = M + \varepsilon \sin E.$$

În cazul ecuaţiilor diferenţiale, metoda aproximaţiilor succesive a fost introdusă de Joseph Liouville în 1837 şi dezvoltată sistematic de Émile Picard începând cu anul 1890.

Metoda constă în determinarea *puntelor fixe* ale unei funcţii f, adică a soluţiilor ecuaţiei

$$x = f(x),$$

prin trecere la limită în relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2 \ldots,$$

care defineşte *şirul aproximaţiilor succesive* asociat funcţiei f.

Cerinţa minimală pentru ca metoda să funcţioneze este ca f să fie continuă, aceasta asigură faptul că limita şirului (x_n), dacă există, este punct fix pentru f, dar ea nu asigură şi convergenţa lui (x_n).

Dintre condiţiile suplimentare care să asigure convergenţa metodei, una s-a dovedit aplicabilă într-o clasă largă de situaţii, şi a fost formulată în cadrul abstract al spaţiilor liniare normate de către Ştefan Banach în teza sa de doctorat publicată în 1922: *dacă $f : X \to X$ este lipschitziană cu constanţa Lipschitz strict subunitară, adică dacă este o* contracţie*, iar spaţiul liniar normat $(X, \|\cdot\|)$ este complet, atunci f are un punct fix unic $x^* \in X$, şi oricare ar fi termenul iniţial $x_0 \in X$, şirul aproximaţiilor succesive converge la x^*.*

Scopul nostru aici este să demonstrăm riguros acest rezultat, numit astăzi *Teorema de punct fix a lui Banach* sau *Principiul contracţiilor*, şi să prezentăm câteva aplicaţii ale lui.

§1. Metoda aproximaţiilor succesive

Începem prin a prezenta metoda aproximaţiilor succesive, şi am ales ca prim exemplu o metodă antică de aflare a rădăcinii pătrate, metodă care apare în scrierile rămase de la Heron din Alexandria (circa 10 – 70 d.H.) şi anume chiar în *Metrica*, o culegere de formule şi metode de calcul pentru lungimi, arii şi volume, multe dintre ele preluate de la babilonieni.

Exemplul 1. Fie $a > 0$ un număr fixat. Pentru a afla rădăcina pătrată a lui a procedăm astfel: considerăm ca aproximaţie iniţială un număr oarecare $x > 0$ şi calculăm numărul a/x, câtul împărţirii lui a la x. Dacă cele două numere

[1] Necunoscuta E este un unghi numit *anomalia excentrică*, M este *anomalia medie* iar $\varepsilon \in (0, 1)$ este *excentricitatea* orbitei.

sunt egale, ne oprim, deoarece în acest caz $x^2 = a$, altfel considerăm ca valoare aproximativă media aritmetică a acestor două numere, adică pe

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

şi cu această nouă aproximaţie repetăm pasul precedent. Indiferent de valoarea iniţială a lui x, aproximaţiile obţinute sunt din ce în ce mai aproape de rădăcina lui a.

Cu alte cuvinte, în limbajul matematic actual, avem următoarea metodă iterativă: plecăm cu un $x_0 > 0$ orecare şi calculăm, succesiv, termenii şirului

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Obţinem un şir convergent la un număr $x^* \geq 0$, iar acesta verifică în mod evident *ecuaţia limitei*

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{a}{x^*}\right), \tag{2}$$

de unde rezultă că $x^* = \sqrt{a}$. Vom opri calculul efectiv al aproximaţiilor x_n când observăm că s-au "stabilizat" un număr suficient de zecimale.

De exemplu, pentru $a = 16$ şi $x_0 = 29$, se obţin următoarele 10 valori calculate cu 12 zecimale exacte;

```
x0=29
x1=14.7758620689655
x2=7.92935460507786
x3=4.97358665247226
x4=4.09529048512717
x5=4.0011086242342
x6=4.00000015358839
x7=4
x8=4
x9=4
```

Să observăm că ecuaţia

$$x^2 = a$$

a fost pusă sub forma unei *probleme de punct fix*

$$x = f(x),$$

pentru funcţia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{3}$$

Justificarea convergenţei şirului (x_n) este lăsată cititorului, ea poate fi stabilită, de exemplu, prin studierea mărginirii şi monotoniei şirului, vezi Figura 1.

În final, precizăm că simpla transformare a unei ecuaţii într-o problemă de punct fix nu asigură succesul rezolvării ei prin metoda aproximaţiilor sucesive.

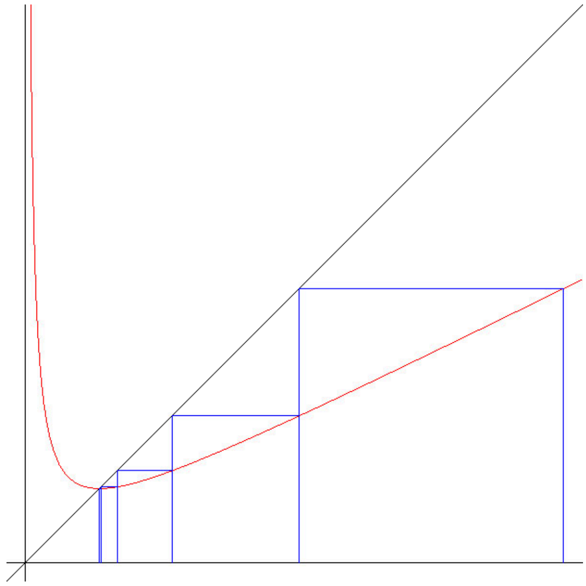

Figura 1: Metoda lui Heron, $a = 16$ şi $x_0 = 29$.

De exemplu, tot ecuaţia

$$x^2 = a,$$

pusă acum sub forma

$$x = \frac{a}{x}$$

conduce la următorul şir periodic de “aproximaţii succesive”:

$$x_1 = \frac{a}{x_0}, \quad x_2 = \frac{a}{x_1} = a \cdot \frac{x_0}{a} = x_0, \quad x_3 = \frac{a}{x_2} = \frac{a}{x_0} = x_1, \ldots,$$

şir care este convergent numai dacă este şir constant, adică dacă aproximaţia iniţială x_0 este chiar soluţia căutată.

§2. Principiul contracţiilor

Cadrul natural în care funcţionează metoda aproximaţiilor succesive s-a dovedit a fi cel al spaţiilor metrice complete. Amintim că un spaţiu metric (X, d) se numeşte *complet* dacă are proprietatea că orice şir fundamental este convergent.

Spaţiile numerice $(\mathbb{R}^n, d)$ şi $(\mathbb{C}^n, d)$, dotate cu distanţa uzuală, sunt spaţii metrice complete, la fel şi spaţiul funcţiilor continue $C([\,a, b\,], \mathbb{R}^n)$, dotat cu metrica convergenţei uniforme

$$d(x, y) = \sup_{t \in [\,a,b\,]} \|x(t) - y(t)\|.$$

Aceste trei exemple sunt de fapt spaţii liniare normate $(X, \|\cdot\|)$, care sunt spaţii metrice complete în metrica indusă de normă, $d(x, y) = \|x - y\|$. Un astfel de spaţiu normat este numit *spaţiu Banach*.

Există şi exemple importante de spaţii metrice care nu sunt complete, dintre care menţionăm doar mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$, dotată cu metrica obişnuită, $d(x, y) = |x-y|$, şi mulţimea funcţiilor continue $C([a, b], \mathbb{R})$, înzestrată cu metrica convergenţei în medie,

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Fie (X, d) un spaţiu metric. Vom spune că aplicaţia $f : X \to X$ este o *contracţie* pe X, dacă există *constanta Lipschitz* $q \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Principiul contracţiilor are următorul enunţ:

Teorema lui Banach. *Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet iar aplicaţia $f : X \to X$ este o contracţie, atunci f are un punct fix unic în X.*

Mai mult, pentru orice punct iniţial $x_0 \in X$, şirul aproximaţiilor succesive

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4}$$

este convergent la punctul fix $x^* \in X$ al lui f, viteza de convergenţă fiind dată de estimarea

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-q} q^n, \tag{5}$$

unde $q \in [0, 1)$ este constanta Lipschitz a lui f.

Demonsţraţie. Considerăm un punct $x_0 \in X$ fixat arbitrar şi definim şirul (x_n) prin relaţia (4). Vom arăta, pentru început, că (x_n) este un şir Cauchy.

Deoarece f este o contracţie, avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq q d(x_n, x_{n+1}),$$

de unde rezultă

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. De aici obţinem imediat, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n \leq m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{m-1} q^i \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-q} q^n. \tag{6}$$

Am folosit majorarea dată de suma seriei geometrice

$$\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q},$$

care este convergentă deoarece constanta Lipschitz q este în intervalul $[0, 1)$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_0,x_1)}{1-q} q^n = 0$ rezultă că există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \geq n_\varepsilon$ implică $\frac{d(x_0,x_1)}{1-q} q^n < \varepsilon$. Din (6) urmează că, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi $m \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, şi deci (x_n) este şir Cauchy. Spaţiul metric X fiind complet, rezultă că (x_n) este convergent, adică există $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

În sfârşit, deoarece f este o contracţie, este continuă şi, trecând la limită în relaţia de recurenţă (4), obţinem egalităţile

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*),$$

care arată că x^* este punct fix pentru f.

Pentru a demonstra unicitatea punctului fix, fie $x^{**} \in X$, cu $x^* \neq x^{**}$, un alt punct fix al lui f. Atunci $d(x^*, x^{**}) > 0$ şi obţinem imediat că

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq q d(x^*, x^{**}) < d(x^*, x^{**}),$$

de unde rezultă o contradicţie.

Estimarea (5) se obţine din (6) prin trecere la limită cu $m \to \infty$.

Observaţie. În cazul când X este un spaţiu Banach, convergenţa şirului (x_n) poate fi stabilită şi prin convergenţa seriei telescopice

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n). \tag{7}$$

Într-adevăr, deoarece $q < 1$ şi, pentru orice n,

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq q\|x_{n+1} - x_n\|,$$

aplicând criteriul raportului pentru seria numerică

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$$

obţinem că aceasta este convergenă, iar completitudinea spaţiului X implică, mai departe, convergenţa seriei (7).

Exemplul 2. Definim $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin

$$f(z) = az + i,$$

unde

$$a = \frac{9}{10}(\cos\frac{\pi}{7} + i \sin\frac{\pi}{7}).$$

Deoarece

$$|f(u) - f(v)| = |a||u - v| \leq \frac{9}{10}|u - v|,$$

pentru orice u şi v din $\mathbb{C}$, f este o contracţie. Unicul său punct fix este soluţia ecuaţiei $z = az + i$, adică $z^* = i/(1 - a)$, şi acesta este limita şirului recurent

$$z_{n+1} = az_n + i, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

pentru orice dată iniţială $z_0 \in \mathbb{C}$.

Observaţie. În practică, în cazul când X este un spaţiu metric foarte mare, de exemplu un spaţiu liniar normat, existenţa unei contracţii potrivite pe întreg spaţiul X este foarte puţin probabilă, şi atunci se utilizează cel mai adesea următoarea variantă:

Fie $X_0 \subset X$ o submulţime închisă a spaţiului metric complet (X, d) şi fie $f : X_0 \to X$ o aplicaţie pentru care X_0 este mulţime invariantă, adică

$$f(X_0) \subset X_0.$$

Dacă f este o contracţie pe X_0, atunci ea are un punct fix unic în X_0.

Justificarea este imediată: este suficient să observăm mai întâi că mulţimea X_0, fiind închisă în spaţiul metric complet X, este la rândul său un spaţiu metric complet cu metrica indusă de X, şi apoi să aplicăm apoi Teorema de punct fix a lui Banach pe (X_0, d).

Exemplul 3. Reluăm funcţia din Exemplul 1, $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dată de

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

şi notăm $X_0 = [\,\sqrt{a}, +\infty)$. Este uşor de văzut că $f(X_0) \subset X_0$ şi că derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

are valorile mărginite

$$f'(x) \in \left[\,0, \frac{1}{2}\right),$$

pentru orice $x \in X_0$. Din Teorema creşterilor finite, aplicată pe un interval oarecare $[\,x, y\,] \subset [\,\sqrt{a}, +\infty)$, avem

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

şi, prin urmare, f este o contracţie pe X_0. Cum punctul fix al lui f în X_0 este $x^* = \sqrt{a}$, rezultă că şirul lui Heron converge la rădăcina pătrată a lui a, pentru orice dată iniţială $x_0 \geq \sqrt{a}$.

Pentru $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ avem $x_1 = f(x_0) \in X_0 = [\,\sqrt{a}, +\infty)$ şi în continuare şirul se comportă ca în cazul precedent.

§3. Teorema lui Picard

Reluăm demonstraţia teoremei lui Picard dată la curs, acum cu principiul contracţiilor, chiar dacă, din punct de vedere istoric, sitauţia este în ordine inversă: metoda aproximaţiilor succesive aplicată de Picard a condus, mai târziu, la stabilirea principiului contracţiilor.

Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi, \end{cases} \tag{8}$$

unde $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă oarecare definită pe un cilindru închis

$$\Delta = [\,a, a + h\,] \times B(\xi, r),$$

cu

$$B(\xi, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ pentru care } \|x - \xi\| \leq r\},$$

şi definim

$$M = \sup_{(t,x)\in\Delta} \|f(t,x)\| < +\infty.$$

Mai mult, considerăm că f este lipschitziană în raport cu x pe Δ, mai precis: există $L > 0$ astfel încât pentru orice $(t,u), (t,v) \in \Delta$, să avem

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \le L\|u - v\|. \tag{9}$$

Fie $\delta \in (0, h]$ fixat, deocamdată, arbitrar. Ştim că problema Cauchy (8) este echivalentă cu ecuaţia integrală Volterra

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau,\ \ t \in [\,a, a+\delta\,]. \tag{10}$$

Prin soluţie a ecuaţiei Volterra înţelegem o funcţie $x \in C([\,a, a+\delta\,], \mathbb{R}^n)$ care verifică egalitatea (10) pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$, caz în care rezultă că x este de clasă C^1 şi verifică problema Cauchy (8).

Observăm că ecuaţia (10) poate fi scrisă sub forma problemei de punct fix

$$x = \Gamma(x),$$

cu $x \in C([\,a, a+\delta\,], \mathbb{R}^n)$, dacă prin $\Gamma(x)$ înţelegem funcţia dată de formula

$$\Gamma(x)(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [\,a, a+\delta\,]. \tag{11}$$

Considerăm spaţiul $X = C([\,a, a+\delta\,], \mathbb{R}^n)$ dotat cu metrica convergenţei uniforme,

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sup_{t\in[\,a,a+\delta\,]} \|x(t) - y(t)\|,$$

şi, pentru început, dorim să găsim o submulţime închisă $X_0 \subset X$ astfel încât să fie bine definită aplicaţia $x \in X_0 \mapsto \Gamma(x) \in X$.

Pentru ca $\Gamma(x)(t)$ să poată fi calculat pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$, este necesar ca $x(t)$ să nu părăsească bila $B(\xi, r)$ din $\mathbb{R}^n$, adică

$$\|x(t) - \xi\| \le r, \quad \forall t \in [\,a, a+\delta\,],$$

relaţie echivalentă cu

$$\sup_{t\in[\,a,a+\delta\,]} \|x(t) - \xi\| \le r.$$

Definim aşadar funcţia constantă $\widetilde{\xi} : [\,a, a+\delta\,] \to \mathbb{R}^n$,

$$\widetilde{\xi}(t) = \xi \quad \forall t,$$

şi notăm cu $X_0 = \mathcal{B}(\widetilde{\xi}, r)$ bila închisă din $C([\,a, a+\delta\,], \mathbb{R}^n)$, centrată în $\widetilde{\xi} \in X$ şi de rază r:

$$\mathcal{B}(\widetilde{\xi}, r) = \{x \in C([\,a, a+\delta\,], \mathbb{R}^n) \text{ pentru care } \|x - \widetilde{\xi}\| \le r\}.$$

Pentru orice $x \in X_0$, funcţia $\Gamma(x)$ dată de (11) este definită pe $[\,a, a+\delta\,]$ şi, mai mult, este continuă. Am arătat astfel că aplicaţia

$$\Gamma : X_0 \to X$$

este bine definită.

Acum ne propunem să vedem în ce condiţii submulţimea închisă X_0 este invariantă, adică $\Gamma(X_0) \subset X_0$. Pentru orice $x \in X_0$, avem

$$\|\Gamma(x) - \widetilde{\xi}\| = \sup_{t\in[\,a,a+\delta\,]} \|\Gamma(x)(t) - \xi\| \leq \sup_{t\in[\,a,a+\delta\,]} \int_a^t \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \leq \delta M.$$

Urmează că, dacă

$$\delta \leq \frac{r}{M}, \tag{12}$$

atunci $\Gamma(x) \in \mathcal{B}(\widetilde{\xi}, r)$ pentru orice $x \in \mathcal{B}(\widetilde{\xi}, r)$.

În sfârşit, cerem ca Γ să fie o contracţie. Pentru orice $x, y \in X_0$, avem majorările

$$\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\| = \sup_{t\in[\,a,a+\delta\,]} \| \int_a^t (f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))d\tau\| \leq$$

$$\leq \int_a^{a+\delta} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq L\delta \sup_{\tau\in[\,a,a+\delta\,]} \|x(\tau) - y(\tau)\| \leq$$

$$\leq L\delta\|x - y\|,$$

şi, prin urmare, pentru ca Γ să fie o contracţie este suficient să cerem

$$\delta < \frac{1}{L}. \tag{13}$$

Aplicând acum teorema de punct fix a lui Banach, obţinem următoarea variantă a teoremei lui Picard:

Teoremă. *Fie $f : \Delta = [\,a, a + h\,] \times B(\xi, r) \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe Δ care satisface condiţia Lipschitz pe $B(\xi, r)$, adică există $L > 0$ astfel încât pentru orice $(t, u), (t, v) \in \Delta$, să avem*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|,$$

şi fie

$$\delta = \min\left\{h, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\right\}.$$

unde $M = \sup_{(t,x)\in\Delta} \|f(t, x)\|$.

Atunci pe intervalul $[\,a, a + \delta\,]$ problema Cauchy (8) are o soluţie unică

$$x^* : [\,a, a + \delta\,] \to B(\xi, r)$$

şi aceasta este limita uniformă pe $[\,a, a + \delta\,]$ a şirului de funcţii

$$x_k : [\,a, a + \delta\,] \to B(\xi, r),\ \ k = 0, 1, 2\dots,$$

definit recurent astfel

$$x_{k+1}(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x_k(\tau))\, d\tau, \quad \text{pentru } t \in [\,a, a + \delta\,], k = 0, 1, 2\dots,$$

cu $x_0 : [\,a, a + \delta\,] \to B(\xi, r)$ o funcţie continuă oarecare.

În plus, are loc următoarea formulă de evaluare a erorii

$$\|x_k(t) - x^*(t)\| \leq \frac{M\delta}{1 - L\delta} \cdot \frac{1}{2^k},$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $t \in [\,a, a + \delta\,]$.

§4. Exerciţii

Exerciţiul 1. Fie X o mulţime nevidă oarecare înzestrată cu *metrica discretă*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Arătaţi că (X,d) este un spaţiu metric complet în care principiul contracţiilor se reduce la afirmaţia banală: "orice funcţie constantă are un punct fix unic".

Exerciţiul 2. Fie X mulţimea şirurilor formate numai din 0 sau 1,

$$X = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \text{ cu } x_i \in \{0,1\}\},$$

şi fie $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dată de

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Arătaţi că (X,d) este un spaţiu metric complet în care operatorii de deplasare la stânga şi la dreapta, S şi D, definiţi de

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto S(x) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

şi

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto D(x) = (0, x_0, x_1, \dots),$$

sunt aplicaţii lipschitziene, D fiind chiar o contracţie. Studiaţi punctele fixe şi comportarea şirului aproximaţiilor succesive pentru aceste două aplicaţii.

Exerciţiul 3. Fie $f : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ şi $k : [\,a,b\,] \times [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue şi λ un număr real fixat.

Arătaţi, folosind principiul contracţiilor, că dacă $|\lambda|$ este suficient de mic, atunci există o singură funcţie continuă $x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}$ care să verifice *ecuaţia integrală Fredholm*

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds, \tag{14}$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$.