Tutorial 6. Convergenţa uniformă

Considerăm un interval închis oarecare $[\,a,b\,] \subset \mathbb{R}$ şi notăm cu $F_{[\,a,b\,]}$ mulţimea tuturor funcţiilor definite pe $[\,a,b\,]$ cu valori în $\mathbb{R}$,

$$F_{[\,a,b\,]} = \{x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie oarecare}\}.$$

Această mulţime este organizată în mod natural ca spaţiu liniar, definind adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorilor cu scalari prin

$$\forall\, x, y \in F_{[\,a,b\,]},\ (x+y)(t) = x(t) + y(t),\ \forall\, t \in [\,a,b\,], \tag{1}$$

şi

$$\forall\, x \in F_{[\,a,b\,]}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda x)(t) = \lambda x(t),\ \forall\, t \in [\,a,b\,]. \tag{2}$$

Acest spaţiu liniar are dimensiune infinită: următorul sistem de vectori

$$1,\ t,\ t^2,\ \ldots\ t^k, \ldots$$

fiind, de exemplu, liniar independent.

Ştim că orice spaţiul liniar peste $\mathbb{R}$ de dimensiune finită n este izomorf cu $\mathbb{R}^n$, să observăm acum că însuşi $\mathbb{R}^n$ poate fi definit ca un spaţiu de funcţii: dacă $N = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ este o mulţime cu n elemente oarecare, atunci identificând orice funcţie $x : N \to \mathbb{R}$ cu n-upla generată de valorile sale

$$x = (x(t_1), x(t_2), \ldots, (t_n)) = (x_1, x_2, \ldots x_n),$$

obţinem o identificare cu $\mathbb{R}^n$, printr-un izomorfism de spaţii liniare, a spaţiului de funcţii

$$F_N = \{x : N = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie oarecare}\}.$$

Din acest motiv, vom spune că vectorii $x \in F_{[\,a,b\,]}$ au componentele $x(t)$, cu $t \in [\,a,b\,]$, şi că în (1) şi (2) operaţiile sunt definite pe componente.

Spaţiul de funcţii $F_{[\,a,b\,]}$ are numeroase subspaţii liniare de interes general, dintre care menţionăm:

$$M_{[\,a,b\,]} = \{x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie mărginită}\},$$

$$R_{[\,a,b\,]} = \{x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie integrabilă Riemann}\}$$

$$C_{[\,a,b\,]} = \{x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie continuă}\}.$$

şi

$$P_{[\,a,b\,]} = \{x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,;\, x \text{ funcţie polinomială}\}.$$

Subliniem că avem următoarele incluziuni de subspaţii liniare

$$P_{[\,a,b\,]} \subset C_{[\,a,b\,]} \subset R_{[\,a,b\,]} \subset M_{[\,a,b\,]} \subset F_{[\,a,b\,]},$$

şi amintim că, de exemplu, $C_{[\,a,b\,]}$ este subspaţiu liniar în $F_{[\,a,b\,]}$ deoarece orice combinaţie liniară a două funcţii continue este o funcţie continuă.

După cum ştim, convergenţa unui şir de puncte din $\mathbb{R}^n$ este caracterizată de convergenţa pe fiecare componentă. Acest mod de a înţelege convergenţa conduce în cazul spaţiilor de funcţii la *convergenţa punctuală*, definită de

Definiţia 1. *Şirul $(x_k)_k$ din $F_{[a,b]}$ converge punctual la $x \in F_{[a,b]}$ dacă*

$$\forall t \in [\,a, b\,],\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \tilde{k} = \tilde{k}(t, \varepsilon)\ a.\ \hat{\imath}.\ k \geq \tilde{k} \Rightarrow |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Aşadar,

$$x_k \xrightarrow[{[\,a,b\,]}]{c.p.} x \Leftrightarrow \forall t \in [\,a, b\,],\ x_k(t) \to x(t).$$

Convergenţa punctuală este utilă în multe situaţii, ea este un prim pas în definirea de noi funcţii ca limite de şiruri sau, mai ales, ca sume de serii de funcţii, dar are un mare neajuns: nu garantează transferul de la termenii şirului la funcţia limită a proprietăţilor de mărginire, de integrabilitate Riemann sau de continuitate.

Exemplul 1. *Şirul*

$$x_k(t) = \begin{cases} 0,\ t \in [\,0, \frac{1}{k}\,] \\ \frac{1}{t},\ t \in (\frac{1}{k}, 2\,], \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

din $M_{[\,0,2\,]}$, are ca limită punctuală funcţia nemărginită

$$x : [\,0, 2\,] \to \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{cases} 0,\ t = 0 \\ \frac{1}{t},\ t \in (0, 2\,]. \end{cases}$$

Să observăm că toate funcţiile x_k din exemplul de mai sus, fiind continue pe porţiuni, sunt integrabile Riemann pe $[\,a, b\,]$, dar funcţia limită x nu este integrabilă Riemann, fiind nemărginită. Convergenţa punctuală nu păstrează deci nici mărginirea, nici integrabilitatea Riemann.

Exemplul 2. *Şirul $x_k(t) = t^k$ din $C_{[\,0,1\,]}$ are ca limită funcţia*

$$x : [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{cases} 0,\ t \in [\,0, 1) \\ 1, t = 1, \end{cases}$$

care este evident discontinuă în $t = 1$.

Revenind la convergenţa în $\mathbb{R}^n$, se poate verifica uşor că aceasta poate fi definită în mod echivalent cu oricare dintre următoarele trei norme uzuale

$$\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

sau

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ultima dintre aceste norme poate fi extinsă uşor la spaţiul funcţiilor mărginite pe $[\,a,b\,]$, maximul din modulele componentelor devenind în acest caz

$$\|x\| = \sup_{t\in[\,a,b\,]} |x(t)|, \tag{3}$$

pentru orice $x \in M_{[\,a,b\,]}$. Vom numi această normă *norma supremum*, şi atragem atenţia că, în cazul când $x \in C_{[\,a,b\,]}$, supremumul din formula de mai sus este chiar un maximum, fiind o valoare atinsă de funcţia continuă $t \mapsto |x(t)|$.

Distanţa indusă de această normă pe $M_{[\,a,b\,]}$, şi anume

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sup_{t\in[\,a,b\,]} |x(t)-y(t)|,$$

pentru orice $x, y \in M_{[\,a,b\,]}$, reprezintă *abaterea maximă* dintre punctele $x(t)$ şi $y(t)$ din $\mathbb{R}$, când t parcurge intervalul $[\,a,b\,]$. Convergenţa în $M_{[\,a,b\,]}$ dată de această distanţă este chiar *convergenţa uniformă* a şirurilor de funcţii:

$$x_k \xrightarrow[{[\,a,b\,]}]{c.u.} x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[\,a,b\,]} |x_k(t)-x(t)| = 0. \tag{4}$$

Să amintim definiţia convergenţei uniforme în $F_{[\,a,b\,]}$:

Definiţia 2. *Şirul $(x_k)_k$ din $F_{[\,a,b\,]}$ converge uniform la $x \in F_{[\,a,b\,]}$ dacă*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon)\ \textit{a. î.}\ k \geq \tilde{k} \Rightarrow |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon, \forall t \in [\,a,b\,].$$

Este uşor de văzut că dacă $x_k \xrightarrow[{[\,a,b\,]}]{c.u.} x$ în $F_{[\,a,b\,]}$ atunci, măcar de la un loc încolo, $x_k - x \in M_{[\,a,b\,]}$ şi are loc caracterizarea (4). Reţinem: un şir de funcţii (x_k) converge uniform la o funcţie x dacă şi numai dacă abaterea maximă

$$\alpha_k = \sup_{t\in[\,a,b\,]} |x_k(t) - x(t)|$$

dintre termenii săi şi funcţia limită tinde la zero.

Exemplul 3. *Şirul $x_k(t) = \frac{1}{t^k}$ din $C_{[\,2,3\,]}$ are ca limită uniformă funcţia nulă deoarece abaterea maximă*

$$\alpha_k = \sup_{t\in[\,2,3\,]} \left| \frac{1}{t^k} - 0 \right| = \frac{1}{2^k},$$

are limita zero pentru $k \to \infty$.

Convergenţa uniformă implică, în mod evident, convergenţa punctuală către aceeaşi funcţie limită, dar reciproca nu are loc. Şirurile din Exemplele 1 şi 2 sunt punctual convergente fără să fie şi uniform convergente, deoarece în primul caz $\alpha_k = +\infty$ pentru orice k, iar în al doilea

$$\alpha_k = \sup_{t\in[\,0,1\,]} |x_k(t) - x(t)| = \sup_{t\in[\,0,1)} |t^k| = 1,$$

pentru orice k.

Exemplul 4. *Şirul de funcţii*

$$x_k(t) = \begin{cases} 4kx(kx-1), \ t \in [\,0, \frac{1}{k}\,] \\ 0, \ t \in (\frac{1}{k}, 2\,], \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

din $C_{[\,0,2\,]}$*, are ca limită punctuală funcţia nulă*

$$x : [\,0,2\,] \to \mathbb{R}, \quad x(t) = 0, \ \forall t \in [\,0,2\,],$$

fără ca această convergenţă să fie uniformă.

Într-adevăr, pentru orice $t \in (0, 2\,]$ alegem un $k_t > \frac{1}{t}$ şi avem implicaţiile

$$k \geq k_t \ \Rightarrow \ t \in (1/k, 2\,] \ \Rightarrow \ x_k(t) = 0,$$

deci $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = 0$. În $t = 0$ avem $x_k(0) = 0$ pentru orice k, deci şirul de funcţii (x_k) converge punctual la funcţia nulă. Convergenţa nu este uniformă deoarece abaterea maximă

$$\alpha_k = \sup_{t\in[\,0,2\,]} |x_k(t) - 0| = \sup_{t\in[\,0,1/k\,]} |4kx(kx-1)| = 1, \ \forall k \geq 1,$$

nu tinde la zero.

Convergenţa uniformă transferă mărginirea, continuitatea şi integrabilitatea Riemann:

Teorema 1. *Fie* $(x_k)_k$ *un şir din* $F_{[\,a,b\,]}$ *care converge uniform la* $x \in F_{[\,a,b\,]}$*.*
(1°) *Dacă* $x_k \in M_{[\,a,b\,]}$ *pentru orice* k*, atunci şi limita* $x \in M_{[\,a,b\,]}$*.*
(2°) *Dacă* $x_k \in C_{[\,a,b\,]}$ *pentru orice* k*, atunci şi limita* $x \in C_{[\,a,b\,]}$*.*
(3°) *Dacă* $x_k \in R_{[\,a,b\,]}$ *pentru orice* k*, atunci* $x \in R_{[\,a,b\,]}$ *şi, mai mult,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b x_k(t)dt = \int_a^b x(t)dt. \tag{5}$$

Punctul (1°), transferul mărginirii, este evident iar demonstrarea punctului (2°) este simplă: presupunem că şirul $(x_k)_k$ din $C_{[\,a,b\,]}$ converge uniform la un $x \in F_{[\,a,b\,]}$, ceea ce înseamnă că

$$\alpha_k = \sup_{t\in[\,a,b\,]} |x_k(t) - x(t)| \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

Vrem să arătăm că funcţia limită x este continuă într-un $t^* \in [\,a, b\,]$ fixat arbitrar. Folosind intercalarea

$$|x(t) - x(t^*)| \leq |x(t) - x_k(t)| + |x_k(t) - x_k(t^*)| + |x_k(t^*) - x(t^*)|$$

obţinem că

$$|x(t) - x(t^*)| \leq 2\alpha_k + |x_k(t) - x_k(t^*)|, \tag{6}$$

pentru orice k şi orice $t \in [\,a, b\,]$.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, există un k_0 pentru care $\alpha_{k_0} < \varepsilon/3$, iar pentru acest k_0, deoarece funcţia x_{k_0} este continuă în t^*, există un $\delta = \delta_{k_0}(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|t - t^*| < \delta$ implică $|x_{k_0}(t) - x_{k_0}(t^*)| < \varepsilon/3$. Din (6) urmează că

$|t-t^*|<\delta$ implică $|x(t)-x(t^*)|<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$, şi astfel am arătat că funcţia x este continuă în t^*. Cum t^* a fost fixat arbitrar, avem că x este continuă pe $[\,a,b\,]$.

A mai rămas de justificat punctul (3°). Demonstraţia clasică utilizează Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann şi se bazează pe compararea diferenţei dintre sumele Darboux superioră şi inferioară pentru funcţia limită x cu aceeaşi diferenţă pentru o funcţie x_{k_0}, cu k_0 suficient de mare.

Aici vom utiliza o altă abordare, pe baza Criteriului lui Lebesgue de integrabilitate Riemann, prezentat în continuare fără demonstraţie. Să precizăm mai întâi noţiunile necesare.

Definiţia 3. *O submulţime $E\subset\mathbb{R}$ se numeşte* neglijabilă *dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale $I_k\subset\mathbb{R}$ astfel încât $E\subset\cup_k I_k$ şi $\sum_k \ell(I_k)<\varepsilon$, unde cu $\ell(I_k)$ am notat lungimea intervalului I_k.*

O afirmaţie despre punctele unei submulţimi $A\subset\mathbb{R}$ se spune că este adevărată *aproape peste tot* pe A dacă este adevărată pentru orice punct din $A\setminus E$, cu E o mulţime neglijabilă.

Teorema 2. (Criteriul lui Lebesgue) *O funcţie mărginită $x:[\,a,b\,]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă este continuă aproape peste tot pe intervalul $[\,a,b\,]$.*

Pentru aplicarea acestui criteriu trebuie să arătăm mai întâi că o reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile este neglijabilă[1]. Fie $E=\cup_{k=1}^{\infty}E_k$ cu E_k mulţimi neglijabile, $k=1,2\ldots$, şi fie $\varepsilon>0$ fixat arbitrar. Fiecare E_k admite o acoperire numărabilă cu intervale $\{I_{kh};\ h=1,2,\ldots\}$ cu $\sum_{h=1}^{\infty}\ell(I_{kh})<\varepsilon/2^k$. Este evident că pentru orice renumerotare $\{I_j;\ j=1,2,\ldots\}$ a familiei dublu indexate $\{I_{kh};\ k,h=1,2,\ldots\}$ avem, pentru orice $n\ge 1$, $\sum_{j=1}^{j=n}\ell(I_j)\le\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon/2^k=\varepsilon$, de unde tragem concluzia că E este neglijabilă.

Să observăm acum că în demonstraţia punctului (2°), pentru a obţine continuitatea funcţiei limită x într-un punct t^* oarecare, avem nevoie continuitatea funcţiilor x_k numai în t^*, nu pe tot intervalul $[\,a,b\,]$.

Acum (3°) se arată uşor: presupunem că funcţiile $x_k\in R_{[a,b]}$, $k=1,2,\ldots$, rezultă că sunt mărginite şi, din Criteriul lui Lebesgue, urmează că sunt continuie aproape peste tot pe $[\,a,b\,]$, adică sunt continue pe mulţimi de forma $[\,a,b\,]\setminus E_k$, cu E_k submulţimi neglijabile. De aici urmează că în orice $t^*\in[\,a,b\,]\setminus\cup_{k=1}^{\infty}E_k$ toate funcţiile x_k sunt continue şi, prin urmare, x este continuă în t^*. Deoarece $\cup_{k=1}^{\infty}E_k$ este neglijabilă, ca reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile, rezultă că funcţia limită x este continuă aproape peste tot pe $[\,a,b\,]$, şi cum ea este mărginită (din (1°)), rezultă că este integrabilă Riemann.

În sfârşit, am arătat că există $\int_a^b x(t)dt$ şi astfel, din majorarea

$$\left|\int_a^b x_k(t)dt-\int_a^b x(t)dt\right|\le\int_a^b |x_k(t)-x(t)|dt\le\alpha_k(b-a),$$

obţinem relaţia (5).

Atragem atenţia că convergenţa uniformă conservă mărginirea, continuitatea şi integrabilitatea, dar nu şi derivabilitatea. În exemplul următor avem un şir de

[1]Justificarea ar fi imediată dacă am şti că mulţimile neglijabile sunt de fapt mulţimile care au *măsura Lebesgue* nulă şi că măsura Lebesgue este o funcţie de mulţime numărabil subaditivă.

funcţii derivabile pe $[\,-1,1\,]$ convergent uniform la funcţia $x(t)=|t|$, nederivabilă în $t=0$.

Exemplul 5. *Şirul* $x_k(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{k}}$ *din* $C_{[\,-1,1\,]}$ *are ca limită uniformă funcţia* $x(t)=|t|$ *deoarece abaterea maximă*

$$\alpha_k=\sup_{t\in[\,-1,1\,]}\left|\sqrt{t^2+\frac{1}{k}}-\sqrt{t^2}\right|=\sup_{t\in[\,-1,1\,]}\left|\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{t^2+\frac{1}{k}}+\sqrt{t^2}}\right|\le\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{1}{k}}}=\frac{1}{\sqrt{k}},$$

are limita zero pentru $k\to\infty$.

Condiţiile suplimentare care trebuie adăugate convergenţei uniforme pentru a garanta transferul derivabilităţii se pot afla din tratatele de analiză matematică, noi acum încheiem expunerea prin enunţarea următorului rezultat remarcabil, care afirmă în esenţă că spaţiul $C_{[\,a,b\,]}$ este închiderea lui $P_{[\,a,b\,]}$ în topologia indusă de norma supremum:

Teorema de aproximare a lui Weierstrass. *Orice funcţie continuă* $x:[\,a,b\,]\to\mathbb{R}$ *este limita uniformă a unui şir de funcţii polinomiale.*