Tutorial 7. Funcţia exponenţială în $\mathbb{C}$

Am văzut într-un tutorial anterior că, în cazul funcţiilor reale, funcţia exponenţială $x(t) = e^{at}$ poate fi definită, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ fixat, ca fiind unica soluţie a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Vom arăta în continuare că acestă cale poate fi urmată şi pentru a defini funcţia exponenţială în mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe.

Dotăm $\mathbb{C}$ cu distanţa uzuală

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

pentru orice $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, şi observăm că din punctul de vedere al convergenţei, $\mathbb{C}$ coincide cu $\mathbb{R}^2$.

În consecinţă, continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor de argument real cu valori complexe

$$z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

se caracterizează pe componente, ca şi cum ar fi funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^2$, adică: funcţia $z(t) = x(t) + iy(t)$ este de clasă C^1 dacă şi numai dacă $x(t)$ şi $y(t)$ sunt clasă C^1 ca funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ şi, mai mult, avem formula de derivare

$$(x(t) + iy(t))' = x'(t) + iy'(t).$$

Prin urmare, ecuaţia diferenţială

$$z' = f(t, z),$$

cu funcţia necunoscută $z(t) = x(t) + iy(t)$ şi cu $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de forma

$$f(t, z) = u(t, z) + iv(t, z),$$

este echivalentă cu următorul sistem de două ecuaţii diferenţiale cu funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = u(t, x, y) \\ y' = v(t, x, y). \end{cases}$$

Pentru un $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ fixat arbitrar, considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} z' = \lambda z \\ z(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

şi precizăm că prin soluţie a acestei probleme înţelegem o funcţie $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clasă C^1 care satisface ecuaţia $z'(t) = \lambda z(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi respectă data iniţială $z(0) = 1$.

Să observăm că, pentru $z(t) = x(t) + iy(t)$, avem echivalenţele

$$z' = \lambda z \Leftrightarrow x' + iy' = (a + ib)(x + iy) \Leftrightarrow x' + iy' = (ax - by) + i(bx + by),$$

şi, prin urmare, problema (1) este echivalentă cu următoarea problemă Cauchy pentru un sistem liniar omogen în $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Deoarece sistemul are coeficienţi constanţi, problema Cauchy (2) are o soluţie unică definită pe întreaga axă reală. Am justificat astfel următoarea afirmaţie:

Propoziţia 1. Pentru orice $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ fixat arbitrar, problema Cauchy (1) are o soluţie globală unică $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definiţia 1. Notăm cu $\exp_\lambda(t) = z(t)$ unica soluţie a problemei (1).

Propoziţia 2. Funcţia $z = \exp_\lambda(t)$ are proprietăţile

(i) $(\exp_\lambda(t))' = \lambda \exp_\lambda(t)$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$;

(ii) $\exp_\lambda(t + s) = \exp_\lambda(t) \exp_\lambda(s)$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$;

(iii) $\exp_{\lambda+\mu}(t) = \exp_\lambda(t) \exp_\mu(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(v) $\exp_a(t) = e^{at}$ pentru orice $a, t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Formula de derivare (i) rezultă din Definiţia 1. Pentru (ii), fixăm un s arbitrar şi notăm $u(t) = \exp_\lambda(t + s)$ şi $v(t) = \exp_\lambda(t) \exp_\lambda(s)$. Avem

$$u'(t) = (\exp_\lambda(t + s))' = \lambda \exp_\lambda(t + s) \cdot (t + s)' = \lambda \exp_\lambda(t + s) = \lambda u(t)$$

cu $u(0) = \exp_\lambda(s)$, şi

$$v'(t) = (\exp_\lambda(t))' \exp_\lambda(s) = \lambda \exp_\lambda(t) \exp_\lambda(s) = \lambda v(t)$$

cu $v(0) = \exp_\lambda(0) \exp_\lambda(s) = \exp_\lambda(s)$. Deoarece $u(t)$ şi $v(t)$ sunt soluţii pentru aceeaşi problemă Cauchy, din Propoziţia 1 urmează că ele coincid.

Pentru (iii), notăm $w(t) = \exp_\lambda(t) \exp_\mu(t)$ şi avem

$$w'(t) = \exp_\lambda(t)' \exp_\mu(t) + \exp_\lambda(t) \exp_\mu(t)' =$$

$$= \lambda \exp_\lambda(t) \exp_\mu(t) + \mu \exp_\lambda(t) \exp_\mu(t) = (\lambda + \mu) w(t),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Cum $w(0) = 1 \cdot 1 = 1$ urmează că $\exp_{\lambda+\mu}(t) = w(t)$, din Definiţia 1.

Punctul (v) este o consecinţă a faptului că pentru $b = 0$ problema Cauchy (2) devine

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cu soluţia $x = e^{at}$, $y = 0$.

Propoziţia 3. Pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\exp_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n \tag{3}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Notăm

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} t^n$$

Fie $\lambda = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Pentru orice $N \in \mathbb{N}$ avem

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{n!} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n \cos n\theta}{n!} t^n + i \sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n \sin n\theta}{n!} t^n.$$

Avem majorările

$$\left| \frac{\rho^n \cos n\theta}{n!} t^n \right| \le \frac{\rho^n}{n!} |t|^n, \quad \left| \frac{\rho^n \sin n\theta}{n!} t^n \right| \le \frac{\rho^n}{n!} |t|^n$$

şi cum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} |t|^n = e^{\rho|t|} < +\infty,$$

rezultă că cele două serii de puteri în t care compun seria (3) sunt convergente pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică au raza de convergenţă infinită. In acest caz ele pot fi derivate termen cu termen, şi obţinem

$$z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\theta}{(n-1)!} t^{n-1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\theta}{(n-1)!} t^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1} \cos(n+1)\theta}{n!} t^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1} \sin(n+1)\theta}{n!} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} t^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \lambda z(t),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Am arătat că $z'(t) = \lambda z(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi cum $z(0) = 1$, rezultă, din Definiţia 1, că $z(t) = \exp_\lambda(t)$.

Prin analogie cu cazul real, dăm următoarea definiţie

Definiţia 2. Funcţia exponenţială de argument complex, $\lambda \in \mathbb{C} \to e^\lambda \in \mathbb{C}$ este dată de relaţia

$$e^\lambda = \exp_\lambda(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Propoziţia 3. Funcţia $\lambda \in \mathbb{C} \to e^\lambda \in \mathbb{C}$ are proprietăţile

(i) $e^{\lambda t} = \exp_\lambda(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $e^{\lambda+\mu} = e^{\lambda}e^{\mu}$ pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ şi $e^0 = 1$;

(iv) $e^{\lambda} = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ pentru orice $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Relaţia (i) rezultă din:

$$e^{\lambda t} = \exp_{\lambda t}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = \exp_{\lambda}(t).$$

Formula de derivare (ii) rezultă din (i) iar (iii) este chiar proprietatea (iii) din Propoziţia 2 scrisă pentru $t = 1$. Deoarece din (iii) rezultă că $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, pentru relaţia (iv) este suficient să arătăm că

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!} = 1 + i\frac{b}{1!} - \frac{b^2}{2!} - i\frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} - \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} \cdots \right) + i\left(\frac{b}{1!} - \frac{b^3}{3!} + \cdots \right) = \cos b + i\sin b.$$

Concluzie. Fie $\lambda = a + ib$ un număr complex. Soluţia generală a ecuaţiei

$$z'(t) = \lambda z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

este

$$z(t) = ce^{\lambda t}$$

unde

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu. Arătaţi, prin derivare, că funcţia $z(t) = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$ verifică ecuaţia $z' = (a + ib)z$.

Observaţie. Ştim că ecuaţia $z'(t) = \lambda z(t)$ cu $z(t) \in \mathbb{C}$ este echivalentă cu sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases} \tag{4}$$

din $\mathbb{R}^2$, şi cum pentru $c = c_1 + ic_2$ avem

$$z(t) = ce^{\lambda t} = (c_1 + ic_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt) =$$

$$= (c_1e^{at}\cos bt - c_2e^{at}\sin bt) + i(c_1e^{at}\sin bt + c_2e^{at}\cos bt)$$

rezultă că soluţia generală a sistemului de mai sus este

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{at}\cos bt - c_2e^{at}\sin bt \\ y(t) = c_1e^{at}\sin bt + c_2e^{at}\cos bt, \end{cases}$$

adică

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

de unde tragem concluzia că

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}$$

este o matrice fundamentală pentru acest sistem. Mai mult, observăm că funcţia matriceală $X = X(t)$ verifică problema Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = I \end{cases},$$

unde am notat cu A matricea asociată sistemului liniar omogen (4),

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

şi, prin urmare, $X = X(t)$ este funcţia exponenţială matriceală

$$X(t) = e^{tA},\ t \in \mathbb{R}.$$