Tutorial 9. Soluţii analitice

Considerăm sistemul diferenţial liniar

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1}$$

cu $A : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $b : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funcţii analitice într-un $t = t_0$ din intervalul deschis $\mathbb{I}$, adică dezvoltabile în serie de puteri cu raza de convergenţă nenulă în $t = t_0$. Mai precis, vom considera fără a restrânge generalitatea că $t_0 = 0$ şi că există $\rho > 0$ astfel încât seriile de puteri

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k \tag{2}$$

şi

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k b_k \tag{3}$$

cu $A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $b_k \in \mathbb{R}^n$ pentru orice k, sunt convergente măcar pe intervalul $(-\rho, \rho)$.

Amintim că în $\mathbb{R}^n$ utilizăm norma $\|x\| = \max_i\{|x_i|\}$, iar pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ utilizăm norma matriceală

$$\|A\| = \max_i\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}$$

pentru orice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O serie de puteri ale lui t cu coeficienţi matriceali sau vectoriali este de fapt o matrice sau, respectiv, un vector de serii de puteri cu coeficienţi numerici.

Teorema 1 (Fuchs) *În ipotezele precizate, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, unica soluţie a problemei Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(0) = \xi \end{cases} \tag{4}$$

este dată de seria de puteri

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k x_k \tag{5}$$

cu coeficienţii vectoriali $x_k \in \mathbb{R}^n$ determinaţi din relaţiile de recurenţă

$$\begin{cases} x_0 = \xi, \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} A_{k-j}x_j + b_k\right) \text{ pentru } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{6}$$

şi care este convergentă pentru orice $t \in (-\rho, \rho)$.

Demonstraţie. Forma soluţiei. Ştim că problema Cauchy (4) admite o soluţie globală unică, presupunem acum că aceasta este analitică în $t_0 = 0$ şi, prin urmare, o căutăm sub forma seriei vectoriale de puteri (5). Pe intervalul de convergenţă avem

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k x_{k+1}.$$

Amintim că, în cazul scalar, produsul a două serii numerice de puteri, numit şi produsul după Cauchy, este seria de puteri având coeficienţii calculaţi ca la produsul de polinoame:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j}\beta_j\right) t^k.$$

Mai mult, raza de convergenţă a seriei produs este cel puţin cât raza minimă de convergenţă a seriilor înmulţite.

În cazul nostru, al seriilor matriceale, analizând pe componente, obţinem imediat că

$$A(t)x(t) + b(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k x_k\right) + \sum_{k=0}^{\infty} t^k b_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left(\sum_{j=0}^{k} A_{k-j} x_j + b_k\right).$$

Comparând această ultimă serie de puteri cu dezvoltarea lui $x'(t)$, obţinem relaţiile de recurenţă(6).

Verificarea formei găsite. Fie acum funcţia $x = x(t)$ dată de seria (5) cu coeficienţii daţi de relaţiile (6). Este evident că pe intervalul ei de convergenţă suma sa $x = x(t)$ este derivabilă şi verifică problema (4). Mai rămâne să arătăm doar că seria este convergentă pentru orice $t \in (-\rho, \rho)$.

Fie $r \in (0, \rho)$ fixat arbitrar şi fie R astfel încât $r < R < \rho$. Deoarece $t = R$ este în intervalul de convergenţă al seriilor de puteri (2) şi (3), seriile $A(R) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k A_k$ şi $b(R) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k b_k$ sunt convergente, şi cum termenul de sumare al unei serii convergente tinde la zero, rezultă că este mărginit, aşadar există constantele $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât

$$R^k \|A_k\| \leq \alpha \text{ şi } R^k \|b_k\| \leq \beta,$$

pentru orice k.

Vom demonstra, prin inducţie, că există $\eta > 0$ astfel încât

$$r^j \|x_j\| \leq \eta, \tag{7}$$

pentru orice $j \in \mathbb{N}$.

Pentru un $k \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar, presupunem că (7) are loc pentru $j = 0, 1, \ldots, k$. Din (6) urmează că

$$(k+1)\|x_{k+1}\| \leq \sum_{j=0}^{k} \|A_{k-j}\| \|x_j\| + \|b_k\|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k} \alpha R^{j-k} \cdot \eta r^{-j} + \beta R^{-k} = \alpha \eta r^{-k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-j} + \beta R^{-k}.$$

Să observăm că, deoarece $0 < r < R$,

$$\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{k-j} = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{i}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{i} = \frac{1}{1-\frac{r}{R}} = \frac{R}{R-r}$$

şi, prin urmare,

$$(k+1)\|x_{k+1}\| \leq \frac{\alpha\eta R}{R-r} r^{-k} + \beta R^{-k} \leq r^{-k}\left(\frac{\alpha\eta R}{R-r} + \beta\right).$$

Presupunând $\eta \geq \beta$, avem în continuare

$$\|x_{k+1}\| \leq r^{-(k+1)} \frac{r}{k+1}\left(\frac{\alpha\eta R}{R-r} + \beta\right) \leq \eta r^{-(k+1)} \cdot M_k(r, R),$$

unde am notat

$$M_k(r, R) = \frac{r}{k+1}\left(\frac{\alpha R}{R-r} + 1\right).$$

Deoarece

$$\lim_{k\to\infty} M_k(r, R) = 0,$$

există un $K = K(r, R) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$M_k(r, R) \leq 1,$$

pentru orice $k > K$. În acest caz, alegem un $\eta > 0$ suficient de mare astfel încât

$$\max\{\beta, \|x_0\|, r\|x_1\|, r^2\|x_2\|, \ldots, r^K\|x_K\|\} < \eta$$

şi atunci relaţia (7) este verificată pentru orice $j \in \{0, 1, 2, \ldots, K\}$, iar dacă pentru un $k > K$ presupunem că (7) are loc pentru orice $j \leq k$ atunci, din cele de mai sus, rezultă că ea este verificată şi pentru $j = k + 1$.

Am arătat astfel, prin inducţie, că (7) are loc pentru orice $j \in \mathbb{N}$. De aici deducem că, pentru orice $t \in (-r, r)$, avem

$$\|t^k x_k\| = |t|^k \|x_k\| \leq \eta \left(\frac{|t|}{r}\right)^k \text{ cu } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|t|}{r}\right)^k < +\infty$$

şi, din criteriul de comparaţie, urmează că seria (5) este convergentă. Cum $r < \rho$ a fost fixat arbitrar, demonstraţia este închiată.