Tutorial 10. Stabilitatea ecuaţiei $x' = \alpha(t)x + \beta(t)$

Vom studia aici stabilitatea soluţiilor ecuaţiei

$$x' = \alpha(t)x + \beta(t)$$

cu $\alpha, \beta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Ecuaţia fiind liniară, ştim că orice soluţie a ei are tipul de stabilitate al soluţiei nule a ecuaţiei omogene

$$x' = \alpha(t)x \tag{E.L.O}$$

astfel că, în continuare, ne vom referi numai la această soluţie.

Problema 1 (criteriu de stabilitate). *Să se demonstreze că:*

(1) *soluţia nulă este simplu stabilă dacă şi numai dacă pentru orice $a \geq 0$ există $M(a) \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq M(a)$$

pentru orice $t \geq a$;

(2) *soluţia nulă este uniform stabilă dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq M$$

pentru orice $a \geq 0$ şi orice $t \geq a$;

(3) *soluţia nulă este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \alpha(s)\, ds = -\infty\,;$$

(4) *soluţia nulă este uniform asimptotic stabilă dacă şi numai dacă există $L > 0$ şi $K \geq 0$ astfel încât*

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq K - L(t-a),$$

pentru orice $a \geq 0$ şi orice $t \geq a$.

Rezolvare. Ecuaţia fiind liniară şi omogenă, ştim forma soluţiei: pentru orice $a \geq 0$ şi $\xi \in \mathbb{R}$, avem

$$x(t, a, \xi) = \xi e^{\int_a^t \alpha(s) ds},$$

pentru orice $t \geq a$. Pentru orice $a \geq 0$ soluţia $x(\cdot, a, \xi)$ este definită pe întreg intervalul $[\,a + \infty)$, deci în definiţiile tipurilor de stabilitate ne vom preocupa numai de punctul (ii).

Demonstraţie pentru (1). Fie $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq M(a),$$

pentru orice $a \geq 0$ şi orice $t \geq a$. Atunci

$$|x(t, a, \xi)| \leq |\xi| e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \leq |\xi| e^{M(a)} \leq \varepsilon$$

pentru orice $t \geq a$, dacă ξ este ales astfel încât

$$|\xi| \leq \delta(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon}{e^{M(a)}},$$

deci soluţia nulă este simplu stabilă.

Reciproc, presupunem că soluţia nulă este simplu stabilă. Rezultă că, pentru $\varepsilon = 1$ şi orice $a \geq 0$, există $\delta(1, a) > 0$ astfel încât pentru $\xi = \frac{\delta(1,a)}{2}$ avem

$$|x(t, a, \xi)| = |\xi| e^{\int_a^t \alpha(s) ds} = \frac{\delta(1, a)}{2} e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \leq 1,$$

pentru orice $t \geq a$, şi prin urmare

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq \ln \frac{2}{\delta(1, a)} = M(a),$$

pentru orice $t \geq a$.

Demonstraţie pentru (2). Se repetă cuvânt cu cuvânt demonstraţia de mai sus, singura diferenţă fiind că acum δ şi M nu mai depind de a. Mai precis, în prima parte, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{e^M}$, iar în a doua parte $M = \ln \frac{2}{\delta(1)}$.

Demonstraţie pentru (3). Notăm $A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds$ şi din

$$\lim_{t \to +\infty} A(t) = -\infty$$

rezultă că există M astfel încât $A(t) \leq M$ pentru orice $t \in [0, +\infty)$. Urmează că, pentru orice $a \geq 0$ avem

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds = A(t) - A(a) \leq M - A(a) = M(a),$$

pentru orice $t \geq a$, şi conform punctului (1), soluţia nulă este simplu stabilă.

Este evident că egalitatea

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, a, \xi) = \lim_{t \to +\infty} \xi e^{\int_a^t \alpha(s) ds} = 0,$$

pentru orice ξ cu $|\xi| \leq \mu(a)$, este echivalentă cu $\int_a^{+\infty} \alpha(s)\, ds = -\infty$, iar mai departe, deoarece această integrală trebuie să fie $-\infty$ pentru orice $a \geq 0$, aceasta relaţie este echivalentă cu $\int_0^{+\infty} \alpha(s)\, ds = -\infty$.

Demonstraţie pentru (4). Dacă există $K \geq 0$ şi $L > 0$ astfel încât

$$\int_a^t \alpha(s)\, ds \leq K - L(t - a)$$

pentru orice $a \geq 0$ şi orice $t \geq a$, atunci are loc (2) cu $M = K$ şi, în consecinţă, soluţia nulă este uniform stabilă. Mai mult, din

$$|x(t, a, \xi)| = |\xi| e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \leq \frac{|\xi| e^K}{e^{L(t-a)}},$$

rezultă imediat că $\lim_{t\to+\infty} |x(t,a,\xi)| = 0$ uniform în raport cu a, deci soluţia nulă este uniform asimptotic stabilă.

Reciproc, să presupunem acum că soluţia nulă este uniform asimptotic stabilă. Deoarece în acest caz este şi uniform stabilă, conform punctului (2) există $M_0 \geq 0$ asfel încât

$$\int_a^t \alpha(s)\,ds \leq M_0,$$

pentru orice $a \geq 0$ şi orice $t \geq a$.

Mai mult, există $\mu > 0$ astfel încât, pentru orice ξ cu $|\xi| < \mu$,

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t,a,\xi)| = 0,$$

uniform în raport cu a, adică: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $T(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|x(t,a,\xi)| < \varepsilon$ dacă $t - a \geq T(\varepsilon)$.

Fixăm $\xi = \frac{\mu}{2}$, $\varepsilon = \frac{\mu}{2e}$, notăm $T_0 = T(\frac{\mu}{2e}) > 0$ şi avem

$$|x(t,a,\xi)| = \frac{\mu}{2} e^{\int_a^t \alpha(s)\,ds} \leq \frac{\mu}{2e} \Leftrightarrow \int_a^t \alpha(s)\,ds \leq -1,$$

pentru orice t şi orice $a \geq 0$ cu $t - a \geq T_0$. Altfel spus, pe orice interval $[\,t_1, t_2\,]$ de lungime mai mare sau egală cu T_0, avem

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha(s)\,ds \leq -1.$$

Pentru orice $a \geq 0$ şi $t > a$ fixaţi arbitrar, există numărul natural N astfel încât $t \in [\,a + NT_0, a + (N+1)T_0)$. Atunci

$$\int_a^t \alpha(s)\,ds = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a+kT_0}^{a+(k+1)T_0} \alpha(s)\,ds + \int_{a+NT_0}^{t} \alpha(s)\,ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} (-1) + M_0 = -N + M_0.$$

Cum $(N+1)T_0 \geq t - a$ rezultă $N \geq -1 + \frac{1}{T_0}(t-a)$ şi, în consecinţă,

$$\int_a^t \alpha(s)\,ds \leq M_0 - N \leq M_0 + 1 - \frac{1}{T_0}(t-a) \leq K - L(t-a),$$

cu $L = \frac{1}{T_0} > 0$ şi $K = M_0 + 1 \geq 0$.

Problema 2. Să se arate că stabilitatea simplă nu implică stabilitatea uniformă.
Rezolvare. Vom construi un exemplu de ecuaţie diferenţială liniară care satisface condiţia (1) dar nu şi condiţia (2) din criteriul de stabilitate de mai sus.

Definim $A : [\,0, +\infty) \to \mathbb{R}$ prin

$$A(t) = -t \sin^2 t,\ \ t \geq 0,$$

şi considerăm $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ca fiind derivata lui A,

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}A(t) = -\sin^2 t - 2t \sin t \cos t,\ t \geq 0.$$

Atunci

$$\int_a^t \alpha(s)\,ds = A(t) - A(a) = a\sin^2 a - t\sin^2 t \leq a\sin^2 a = M(a),$$

pentru orice $a \geq 0$ şi $t \geq a$, deci condiţia (1) este îndeplinită.

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ definim $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ şi $t_k = a_k + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi$, şi avem

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^{t_k} \alpha(s)\,ds = \lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$$

şi, prin urmare, condiţia (2) nu poate avea loc.

Problema 3. Să se arate că stabilitatea asimptotică nu implică stabilitatea uniformă.
Rezolvare. Analog ca mai sus, vom defini o funcţie $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ care satisface condiţia (3) dar nu şi condiţia (2). Definim acum $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ prin

$$A(t) = -(t + 2\sin t)^2,\ t \geq 0,$$

şi

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}A(t) = -2(1 + 2\cos t)(t + 2\sin t),\ t \geq 0.$$

Atunci

$$\int_a^t \alpha(s)\,ds = A(t) - A(a) = (a + 2\sin a)^2 - (t + 2\sin t)^2,$$

pentru orice $a \geq 0$ şi $t \geq a$, astfel că

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \alpha(s)\,ds = -\lim_{t\to+\infty} (t + 2\sin t)^2 = -\infty,$$

şi, prin urmare, condiţia (3) este îndeplinită.

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ definim $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ şi $t_k = a_k + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi$, şi avem

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^{t_k} \alpha(s)\,ds = \lim_{k\to\infty} \left[\left(a_k + 2\right)^2 - \left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)^2\right] = +\infty,$$

deci condiţia (2) nu poate avea loc.