Tutorial 11. Pendulul matematic

Vom studia aici stabilitatea punctelor de echilibru ale unui pendul care se mişcă într-un plan fix numai sub acţiunea forţei de greutate. Începem prin a stabili *modelul matematic* al sistemului fizic studiat, adică ecuaţiile diferenţiale care descriu mişcarea.

§1. Pendulul matematic amortizat.

Într-un plan fix poziţionat vertical, considerăm un pendul (sau un leagăn) format dintr-o tijă OM, subţire, rigidă, de lungime $\ell > 0$ şi de masă neglijabilă, care poate pivota total în jurul unui lagăr situat în punctul fix O şi care are în capătul M o bilă de masă m. Pendulul se mişcă numai sub acţiunea forţei de greutate $\overrightarrow{MG}$, de mărime $|\overrightarrow{MG}| = mg$, unde g este acceleraţia gravitaţională. Modelul prezentat aici se numeşte *pendulul matematic*, spre deosebire de *pendulul fizic* când în locul tijei subţiri se consideră un corp rigid oarecare.

Notăm cu A poziţia de echilibru situată sub punctul de sprijin şi precizăm poziţia pendulului la momentul t prin mărimea unghiului $\varphi(t) = \sphericalangle AOM$ măsurat în radiani, astfel că spaţiul $\Delta s(t)$ parcurs de punctul M între două poziţii t şi $t + h$, suficient de apropiate încât mişcarea să aibe loc într-un singur sens de rotaţie, este

$$\Delta s(t) = \ell\Delta\varphi(t) = \ell(\varphi(t + h) - \varphi(t)),$$

de unde urmează că viteza lui M are valoarea

$$|\vec{v}| = v = \ell\dot{\varphi}.$$

Aici folosim notaţiile: vectorul de poziţie $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, vectorul viteză $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ şi vectorul acceleraţie $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$.

Punctul material M este constrâns să parcurgă cercul $\mathscr{C}(O, \ell)$, pentru a considera că el se mişcă liber numai sub acţiunea unui câmp de forţe, vom introduce o *forţă de legătură* $\overrightarrow{ML}$ care să compenseze forţa centrifugă $\overrightarrow{MN}$, componenta normală la traiectorie a forţei de greutate $\overrightarrow{MG}$, prin urmare $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{MN}$.

În sfârşit, pentru a modela disiparea de energie datorită vâscozităţii mediului în care se desfăşoară mişcarea, vom considera că asupra lui M acţionează şi o *forţă de rezistenţă* $\overrightarrow{MR}$ situată pe tangenta la traiectorie, opusă mişcării, şi proporţională în modul cu viteza

$$\overrightarrow{MR} = -k^2\vec{v}.$$

În acest caz, mişcarea punctului material M este dată de *ecuaţia fundamentală a dinamicii*, numită şi *legea a doua a lui Newton*:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{ML}.$$

Proiectăm această relaţie vectorială pe tangenta la cerc în punctul M şi obţinem

$$ma_\tau = -|\overrightarrow{MT}| + |\overrightarrow{MR}|$$

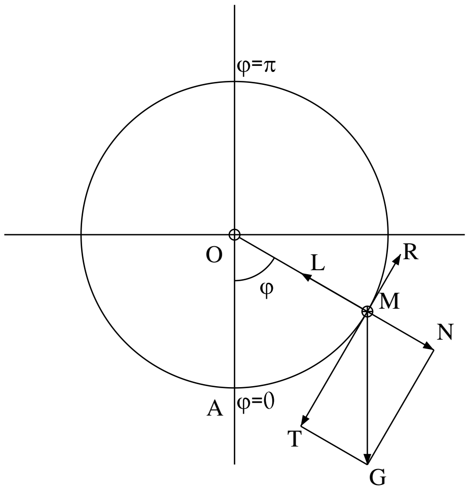

Figura 1: Pendulul amortizat

unde acceleraţia tangenţială a_τ este dată de relaţia

$$a_\tau = \dot{v} = \ell\ddot{\varphi},$$

iar proiecţia forţei de greutate pe direcţia tangentei este

$$|\overrightarrow{MT}| = |\overrightarrow{MG}|\sin\varphi = mg\sin\varphi.$$

Din toate aceste relaţii deducem pentru funcţia $\varphi = \varphi(t)$ următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea

$$m\ell\ddot{\varphi} + k^2\dot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0,$$

pe care o scriem sub forma

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

unde $\gamma = k^2/2m\ell > 0$ şi $\omega^2 = g/\ell > 0$. Această ecuaţie neliniară este numită *ecuaţia pendulului matematic amortizat* sau *ecuaţia pendulului gravitaţional amortizat.*

Vom studia stabilitatea soluţiilor staţionare ale ecuaţiei (1) prin metoda primei aproximaţii. Funcţia constantă $\varphi(t) = \phi$, pentru orice $t \geq 0$, este soluţie dacă şi numai dacă

$$\sin\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi \in \{\phi_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Transformăm ecuaţia (1) într-un sistem. Notăm $x = \varphi$ şi $y = \dot{\varphi}$ şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2\sin x - 2\gamma y. \end{cases} \tag{2}$$

Observaţie. Orice soluţie $\varphi = \varphi(t)$ a ecuaţiei (1) descrie, după cum am văzut, mişcarea punctului M în *spaţiul fizic* format de planul vertical considerat iniţial şi în care poziţia lui M a fost precizată, în acest caz, prin coordonatele sale polare $|OM| = \ell$ şi $\sphericalangle AOM = \varphi$. Pe de altă parte, soluţiei $\varphi = \varphi(t)$ îi corespunde o soluţie a sistemului (2), soluţie care poate fi interpretată ca descrierea mişcării unui punct în spaţiul $\mathbb{R}^2$, care este tot un plan.

Pentru a evita confuziile, spunem că punctul $(x(t), y(t)) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ se mişcă în *spaţiul stărilor* sau în *spaţiul fazelor* sistemului fizic modelat. Denumirea este justificată de faptul că precizarea valorilor *parametrilor de stare* la un moment dat, φ şi $\dot{\varphi}$ în acest caz, determină complet evoluţia sistemului fizic modelat.

În general, traiectoria punctului $(x(t), y(t))$ este o curbă în spaţiul fazelor, în cazul unei soluţii staţionare, când $(x(t), y(t) = (x_0, y_0)$ pentru orice t, traiectoria se reduce la un singur punct, (x_0, y_0), numit *punct staţionar*, sau *punct de echilibru* în spaţiul fazelor.

Revenind la problema noastră, observăm că (2) este un sistem diferenţial autonom de forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

cu $f(x, y) = y$ şi $g(x, y) = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y$, prin urmare matricea jacobiană ataşată este

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & -2\gamma \end{pmatrix}.$$

Studiem pentru început stabilitatea soluţiei staţionare $\varphi(t) = \phi_0 = 0$ a ecuaţiei (1), corespunzătoare punctului staţionar $(x_0, y_0) = (0, 0)$ în spaţiul fazelor. Avem

$$A = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix},$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + 2\gamma \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2.$$

Rădăcinile caracteristice sunt

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \text{ cu } \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\gamma < 0,$$

dacă $0 < \gamma < \omega$, sau

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0,$$

dacă $\omega \leq \gamma$. In ambele cazuri matricea A este hurwitziană, deci soluţia nulă a sistemului (2) este asimptotic stabilă şi o dată cu ea şi soluţia nulă a ecuaţiei (1) are aceeaşi proprietate.

Studiem acum soluţia $\varphi(t) = \phi_1 = \pi$, corespunzătoare punctului staţionar $(x_1, y_1) = (\pi, 0)$ al sistemului (2). Avem

$$A = J(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix},$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda + 2\gamma \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2.$$

Rădăcinile caracteristice sunt

$$\lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} < 0,$$

şi

$$\lambda_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} > 0,$$

de unde rezultă că soluţia staţionară $x(t) = \pi$, $y(t) = 0$ este instabilă, deci şi $\varphi(t) = \pi$ este instabilă.

Considerând acum cazul general $\varphi(t) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se constată imediat că soluţiile $\varphi(t) = 2k\pi$, cele care corespund poziţiei de echilibru a pendulului cu M sub punctul de sprijin O, sunt asimptotic stabile, în timp ce celelalte, $\varphi(t) = (2k+1)\pi$, care corespund poziţiei de echilibru cu M situat exact deasupra punctului de sprijin, sunt instabile, aşa cum era de aşteptat.

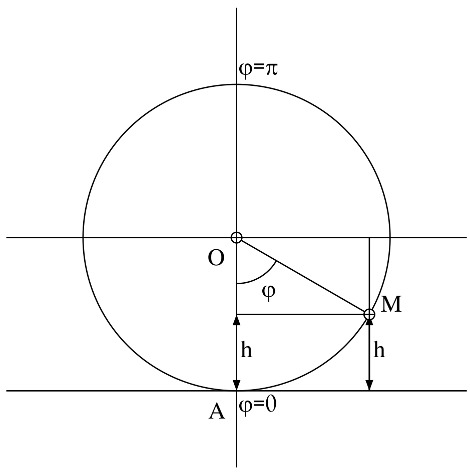

Figura 2: Pendulul neamortizat

§2. Pendulul matematic neamortizat.

Studiem acum pendulul în cazul în care vâscozitatea mediului este neglijabilă, mai precis atunci când coeficientul de amortizare γ este nul.

Reluând calculele de mai sus, observăm imediat că metoda primei aproximaţii dă rezultate numai pentru cazul de instabilitate, când $\lambda_{1,2} = \pm\omega$, fiind în caz de dubiu pentru soluţia nulă, când $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Vom studia aici, direct cu definiţia, stabilitatea soluţiei nule pentru ecuaţia

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0. \tag{3}$$

Metoda folosită în continuare provine din mecanică: în lipsa amortizării, energia totală a pendulului este constantă. Dacă la momentul iniţial pendulul primeşte o cantitate mică de energie, aceasta se va păstra de-a lungul mişcării şi, în consecinţă, punctul M se va îndepărta de punctul de înăţime minimă numai până când creşterea energiei potenţiale va determina anularea energiei cinetice, atunci pendulul se va opri şi punctul M va începe să coboare, mişcându-se astfel, cu viteză mică, în vecinătatea punctului de înălţime minimă.

Energia cinetică a punctului material M este

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2,$$

iar energia sa potenţială, raportată la înălţimea minimă, este

$$E_p = mgh = mg(\ell - \ell\cos\varphi) = 2mg\ell\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

vezi Figura 2. Obţinem expresia energiei totale

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2mg\ell\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\varphi}^2 + 4\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

şi, prin urmare, am găsit pentru pendulul neamortizat următorul *invariant* al mişcării:

$$\dot{\varphi}^2(t) + 4\omega^2\sin^2\frac{\varphi(t)}{2} = \text{const.} \tag{4}$$

Deoarece prin schimbarea de argument $t = \omega\tau$ ecuaţia (3) devine

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin\varphi = 0,$$

vom considera, fără a restrînge generalitatea, $\omega = 1$ chiar în ecuaţia iniţială, pe care o transformăm cu notaţiile $x = \varphi$ şi $y = \dot{\varphi}$ în sistemul echivalent

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x. \end{cases} \tag{5}$$

Relaţia (4) poate fi stabilită uşor direct din acest sistem. Înmulţim membru cu membru cele două ecuaţii şi obţinem

$$yy' = -x'\sin x,$$

de unde deducem că

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2 - 2\cos x\right) = 0.$$

De aici urmează

$$y^2 - 2\cos x = C,$$

cu C o constantă oarecare, de unde, trecând în funcţia cosinus la unghiul pe jumătate, obţinem relaţia (4) sub forma

$$y^2 + 4\sin^2\frac{x}{2} = C,$$

unde am renotat $C + 2\omega^2$ cu C.

În continuare fixăm în mod arbitrar momentul iniţial $a \geq 0$ şi, pentru orice soluţie saturată $(x(t), y(t))$ definită pe un interval maximal $[\,a, T)$, vom nota data iniţială $(x(a), y(a))$ cu (x_0, y_0).

Definim

$$V(x, y) = \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2} + y^2},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ şi reţinem că $V(x(t), y(t)) = V(x_0, y_0)$, pentru orice $t \geq a$.

Utilizând inegalitatea conoscută

$$|\sin t| \leq |t|,$$

pentru orice t, obţinem imediat majorarea

$$V(x, y) \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{6}$$

valabilă pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Analizând, de exemplu, graficul funcţiei $f(t) = \sin t - \dfrac{t}{2}$, obţinem imediat că

$$|\sin t| \geq \frac{|t|}{2},$$

pentru orice $t \in [\,-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\,]$ de unde obţinem estimarea

$$V(x, y) \geq \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{7}$$

valabilă pentru orice $(x, y) \in [\,-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\,] \times \mathbb{R}$.

Fie acum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cu $\|(x_0, y_0)\| = \max\{|x_0|, |y_0|\} \leq \delta_0 = 0,01$. Din (6) deducem că

$$V(x(t), y(t)) = V(x_0, y_0) \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq \sqrt{2}\delta_0 \leq 1,$$

de unde urmează că $|y(t)| \leq 1$ şi

$$\left|\sin \frac{x(t)}{2}\right| \leq \frac{1}{2}. \tag{8}$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$. Inecuaţia (8) în necunoscuta $\alpha = x(t)$ are ca soluţie o reuniune de intervale disjuncte, şi deoarece $x(t)$ este o funcţie continuă, valorile sale vor rămâne în intervalul în care se află data iniţială $x(a) = x_0$, şi anume în intervalul $[\,-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\,]$. Am arătat astfel că

$$\|(x_0, y_0)\| \leq \delta_0 = 0,01 \;\Rightarrow\; |x(t)| \leq \frac{\pi}{3} \;\text{ şi }\; |y(t)| \leq 1,$$

pentru orice $t \in [\,a, T)$, de unde deducem că $T = +\infty$.

Este evident că

$$\lim_{(x_0, y_0) \to (0,0)} V(x_0, y_0) = 0,$$

deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_1(\varepsilon) > 0$ astfel încât, din $\|(x_0, y_0)\| < \delta_1(\varepsilon)$ rezultă $|V(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

În sfârşit definim, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_0, \delta_1(\varepsilon)\} > 0$$

şi atunci, din $\|(x_0, y_0)\| \leq \delta(\varepsilon)$ urmează că soluţia corespunzătoare există pentru orice $t \in [a, +\infty)$, cu $|x(t)| \leq \frac{\pi}{3}$ şi $|y(t)| \leq 1$, prin urmare este aplicabilă estimarea (7) şi obţinem

$$\varepsilon > |V(x_0, y_0)| = |V(x(t), y(t))| \geq \frac{1}{2}\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \geq \frac{1}{2}\|(x(t), y(t))\|,$$

adică

$$\|(x(t), y(t))\| < 2\varepsilon,$$

pentru orice $t \geq a$.

Am arătat astfel că soluţia nulă a sistemului (5) este uniform stabilă.

Să observăm în final că aceasta nu este asimptotic stabilă, deoarece din

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0), \tag{9}$$

rezultă că $(x(t), y(t))$ este soluţia nulă. Într-adevăr, din (9), ţinând cont de continuitatea funcţiei V şi de faptul că ea este constantă pe traiectoriile sistemului, avem

$$V(x(t), y(t)) = \lim_{\tau \to +\infty} V(x(\tau), y(\tau)) = V(0, 0) = 0,$$

pentru orice $t \geq 0$. De aici urmează că $y(t) = 0$ şi $\sin \frac{x(t)}{2} = 0$ pentru orice $t \geq 0$. Din ultima ecuaţie rezultă $x(t) \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pentru orice $t \geq 0$, iar din continuitatea funcţiei $x(t)$ urmează $x(t) = \text{const.} = \lim_{\tau \to +\infty} x(\tau) = 0$, pentru orice $t \geq 0$.