Tutorial 12. Ecuaţii funcţionale

Am văzut, într-un tutorial anterior, că pentru orice număr real $a > 0$ fixat, funcţia exponenţială $x = a^t$ poate fi definită ca fiind unica soluţie analitică a ecuaţiei funcţionale

$$x(t+s) = x(t)x(s), \ \forall\, t, s \in \mathbb{R},$$

care satisface condiţia iniţială

$$x(1) = a.$$

Ne propunem să analizăm aici, cu titlu de exerciţiu, ecuaţia funcţională

$$x(t+s)x(t-s) = x^2(t) - x^2(s), \ \forall\, t, s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Problema 1. Să se verifice că următoarele trei funcţii

(*i*) $\varphi_1(t) = t, \forall\, t \in \mathbb{R}$,

(*ii*) $\varphi_2(t) = \sin t, \forall\, t \in \mathbb{R}$,

(*iii*) $\varphi_3(t) = \operatorname{sh} t, \forall\, t \in \mathbb{R}$,

sunt soluţii ale ecuaţiei (1).

Rezolvare. (*i*). Funcţia identitate este în mod evident o soluţie a ecuaţiei studiate.

(*ii*). Folosind formulele trigonometrice

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

şi

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

obţinem

$$\sin(t+s)\sin(t-s) = \frac{1}{2}\left[\cos(t+s-t+s) - \cos(t+s+t-s)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 2s - \cos 2t\right] = \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 s - 1 + 2\sin^2 t\right] =$$

$$= \sin^2 t - \sin^2 s,$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$.

(*iii*). Utilizând definiţia sinusului hiperbolic

$$\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

obţinem, pe de o parte

$$\operatorname{sh}(t+s)\operatorname{sh}(t-s) = \frac{1}{4}(e^{t+s} - e^{-t-s})(e^{t-s} - e^{-t+s}) =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{2s} - e^{-2s} + e^{-2t}),$$

iar pe cealaltă parte

$$\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{sh}^2 s = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})^2 - \frac{1}{4}(e^s - e^{-s})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t}) - \frac{1}{4}(e^{2s} - 2 + e^{-2s}) = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - e^{2s} - e^{-2s}),$$

ceea ce trebuia arătat.

Problema 2. Să se arate că, dacă funcţia $x = \varphi(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (1), atunci şi $x = \psi(t)$ cu $\psi(t) = \alpha\varphi(\lambda t)$ este o soluţie, pentru orice $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Avem:

$$\psi(t+s)\psi(t-s) = \alpha^2\varphi(\lambda(t+s))\varphi(\lambda(t-s)) = \alpha^2\varphi(\lambda t + \lambda s))\varphi(\lambda t - \lambda s) =$$

$$= \alpha^2\left(\varphi^2(\lambda t) - \varphi^2(\lambda s)\right) = \psi^2(t) - \psi^2(s),\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

Problema 3. Să se arate că orice soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei funcţionale (1) este de forma $x = \alpha\varphi_i(\lambda t)$, $i = 1, 2, 3$, cu φ_i una dintre funcţiile indicate la Problema 1.

Rezolvare. Fie $x = x(t)$ o soluţie de clasă C^2, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferită de soluţia nulă. Pentru fiecare $s \in \mathbb{R}$ fixat are loc identitatea

$$x(t+s)x(t-s) = x^2(t) - x^2(s),\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

din care, prin derivare în raport cu t, obţinem

$$x'(t+s)x(t-s) + x(t+s)x'(t-s) = 2x(t)x'(t),\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

Derivăm acum în raport cu s şi avem

$$x''(t+s)x(t-s) - x'(t+s)x'(t-s) + x'(t+s)x'(t-s) - x(t+s)x''(t-s) = 0,\ \forall\, t, s \in \mathbb{R},$$

adică

$$x''(t+s)x(t-s) = x(t+s)x''(t-s),\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

de unde, notând $t + s = u$ şi $t - s = v$, urmează identitatea

$$x''(u)x(v) = x''(v)x(u),\ \forall\, u, v \in \mathbb{R}.$$

Fixăm un $v = v_0$ pentru care $x(v_0) \neq 0$ şi notăm $a = \frac{x''(v_0)}{x(v_0)}$. Rezultă că

$$x''(u) = ax(u),\ \forall\, u \in \mathbb{R},$$

altfel spus, $x = x(t)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

$$x'' - ax = 0.$$

Să observăm că, în plus, $x(0) = 0$, valoare obţinută din (1) fixând $s = 0$.

Analizând pe rând cazurile $a = 0$, $a < 0$ şi $a > 0$, deducem că soluţia $x = x(t)$ are una din formele indicate în enunţul problemei.

Problema 4. Să se arate că singura soluţie a ecuaţiei funcţionale

$$x(t+s)x(t-s) = x^2(t) + x^2(s),\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

este funcţia nulă.

Rezolvare. Fie $x = x(t)$ o soluţie, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fixând $s = 0$ în (2), deducem că $x(0) = 0$, şi apoi, pentru $s = t$, rezultă că

$$0 = 2x^2(t), \forall\, t \in \mathbb{R},$$

de unde urmează concluzia.

Observaţie. Dacă pentru ecuaţia (2) urmăm exact procedeul din rezolvarea Problemei 3, adică o derivăm în raport cu s şi apoi în raport cu t, obţinem iarăşi că orice soluţie nenulă de clasă C^2 verifică ecuaţia

$$x'' - ax = 0,$$

cu a o constantă oarecare, dar nici una dintre soluţiile nenule ale acestei ecuaţii diferenţiale nu verifică ecuaţia funcţională iniţială, aşa cum am arătat.

Acest exemplu ilustrează faptul că derivarea unei ecuaţii funcţionale introduce aproape întotdeauna soluţii false.

Problema 5. Să se studieze ecuaţia

$$x(t+s)x(t-s) = x^2(t) + x^2(s) - 1,\ \forall\, t, s \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Indicaţie. Mai întâi arătaţi că $x(0) = \pm 1$ şi $x'(0) = 0$, apoi derivaţi în raport cu s şi t. Nu uitaţi să verificaţi soluţiile găsite!