Tutorial 13. Ecuaţia legii de conservare

Considerăm că mişcarea unidimesională de-a lungul unui tub subţire a unor particule materiale de masă egală are loc astfel încât, pentru orice x şi $t \in \mathbb{R}$, prin punctul de abscisă x trece la momentul t o singură particulă, şi aceasta are viteza $v(t,x)$. Altfel spus, presupunem că mişcarea acestor particule este descrisă de ecuaţia diferenţială

$$x' = v(t,x), \tag{1}$$

cu $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1.

Fie $a_0 < b_0$ fixaţi arbitrar. Notăm cu A şi B particulele care la momentul iniţial $t = t_0$ aveau abscisele a_0 şi, respectiv, b_0. Considerăm că mişcarea lui A este dată de soluţia $x = a(t)$ a ecuaţiei (1) care satisface condiţia iniţială $a(t_0) = a_0$, iar mişcarea lui B este descrisă de soluţia $x = b(t)$ pentru care $b(t_0) = b_0$.

Deoarece ipotezele rezultatelor de existenţă şi unicitate globală sunt îndeplinite, aceste două soluţii nu se pot intersecta, şi, prin urmare, $a(t) < b(t)$ pentru orice $t \in I = I_a \cap I_b$, unde I_a şi I_b sunt intervalele de definiţie ale soluţiilor saturate. Particula A va rămâne în urma lui B pe tot timpul mişcării, iar particulele situate iniţial între A şi B vor rămâne tot timpul între A şi B, numărul lor conservându-se de-a lungul mişcării.

Notăm *densitatea* numărului de particule cu $\rho(t,x)$, definită ca fiind o funcţie integrabilă $\rho = \rho(t,x)$ astfel încât numărul de particule situate la momentul t între punctele de abscise $x_0 < x_1$ (sau, echivalent, *masa* acestora) să fie dat de integrala

$$m_{[x_0,x_1]}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t,x)dx.$$

Scopul nostru este să vedem ce condiţii suplimentare trebuie să îndeplinească funcţia $\rho = \rho(t,x) > 0$ astfel încât, pentru oricare două particule A şi B, numărul (sau masa) particulelor situate între ele să se conserve pe timpul mişcării.

Cu notaţiile de mai sus, pentru orice $t \in I$, numărul de particule căutat este

$$m_{[a(t),b(t)]}(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(t,x)dx, \tag{2}$$

şi, prin urmare, cerem ca, pentru orice $a_0 < b_0$ şi orice $t \in I$ să avem

$$m_{[a(t),b(t)]}(t) = m_{[a_0,b_0]}(t_0)$$

adică

$$\frac{d}{dt} m_{[a(t),b(t)]}(t) = 0, \tag{3}$$

pentru orice $t \in I$. Presupunem acum că $\rho = \rho(t,x)$ este de clasă C^1 şi derivăm

$$\frac{d}{dt} m_{[a(t),b(t)]}(t) = \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(t,x)dx =$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x)dx + \rho(t,b(t))b'(t) - \rho(t,a(t))a'(t) =$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x)dx + \rho(t,b(t))v(t,b(t)) - \rho(t,a(t))v(t,a(t)) =$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(t,x)v(t,x)\big)\right] dx.$$

Deoarece relaţia (3) trebuie să aibă loc pentru oricare două soluţii $x = a(t)$ şi $x = b(t)$ cu $a_0 < b_0$, pentru orice moment iniţial t_0, deducem că funcţia de densitate trebuie să satisfacă următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(t,x)v(t,x)\big) = 0, \tag{4}$$

numită *ecuaţia legii de conservare* în cazul unidimensional. Se observă că, scrisă sub forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) + v(t,x)\frac{\partial \rho}{\partial x}(t,x) = w(t,x)\rho(t,x),$$

cu $w(t,x) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x)$, este o ecuaţie cvasi-liniară cu derivate parţiale de ordinul întâi, cu funcţia necunoscută $\rho = \rho(t,x)$.

În continuare vom considera că viteza este o funcţie de densitate, $v = \varphi(\rho)$, caz în care ecuaţia (4) capătă forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

cu $a(\rho) = \varphi(\rho) + \rho\varphi'(\rho)$. Această ecuaţie este des întâlnită în modelarea matematică, de exemplu în modelarea traficului pe o autostradă sau a valurilor lungi formate într-un canal cu secţiune constantă.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă Cauchy ataşată ecuaţiei studiate: să se afle funcţia de densitate $\rho = \rho(t,x)$ în cazul în care densităţile iniţiale sunt cunoscute, mai precis sunt date de relaţia

$$\rho(0,x) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

cu ψ o funcţie de clasă C^1.

Vom rezolva ecuaţia cvasi-liniară (5) aflând două integrale prime independente pentru sistemul caracteristic ataşat, care scris sub forma simetrică arată astfel:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a(\rho)} = \frac{d\rho}{0}.$$

Din $d\rho = 0$ rezultă $\rho = c_1$, iar din

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a(c_1)}$$

urmează $x - a(c_1)t = c_2$, am găsit astfel integralele prime $U_1(t,x,\rho) = \rho$ şi $U_2(t,x,\rho) = x - a(\rho)t$, prin urmare soluţia generală a ecuaţiei (5) este de forma

$$F(\rho, x - a(\rho)t) = 0,$$

cu F o funcţie oarecare de clasă C^1. Explicitând în raport cu prima variabilă, obţinem soluţia generală sub forma

$$\rho = \Phi(x - a(\rho)t), \tag{7}$$

cu Φ de clasă C^1.

Vom determina funcţia necunoscută Φ cerând să fie satisfăcută condiţia iniţială (6). Obţinem

$$\rho(0,x) = \Phi(x) = \psi(x)$$

şi, din (7), găsim soluţia $\rho = \rho(t,x)$ a problemei Cauchy studiate sub forma implicită

$$\rho = \psi(x - a(\rho)t).$$