Tutorial 14. Integrale reductibile la integrale raţionale

Orice integrală de forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx,$$

cu $R(u, v)$ o funcţie raţională, este reductibilă la o integrală raţională prin (cel puţin) una din următoarele substituţii implicite:

Cazul I, dacă $a > 0$**.** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$;

Cazul II, dacă $\Delta > 0$**.** $\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \pm(x - \alpha)t$;

Cazul III, dacă $c > 0$**.** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm tx$;

În aceste substituţii semnele $\pm$ se aleg astfel încât pe intervalele care se lucrează substituţia să fie inversabilă, deoarece se aplică metoda a doua de schimbare de variabilă.

Formal, metoda constă în următorii paşi:

Pasul 1. Explicităm din substituţia aleasă pe x ca funcţie de t, $x = X(t)$;

Pasul 2. Calculăm $dx = X'(t)dt$;

Pasul 3. Calculăm radicalul ca funcţie de t, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = S(t)$;

Pasul 4. Înlocuim în integrala iniţială şi obţinem o integrală raţională în t

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = \int R(X(t), S(t))X'(t)dt = \int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

Pasul 5. Calculăm integrala în t, eventual prin descompunere în fracţii simple (după scoaterea întregilor din fracţie)

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt = F(t) + \mathcal{C}$$

Pasul 6. Inversăm substituţia $x = X(t) \;\Leftrightarrow t = T(x)$ şi revenim în integrala iniţială:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx = F(T(x)) + \mathcal{C}.$$

Exemplul 1.

$$I_1 = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}\, dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicăm cazul I, avem $a = 1 > 0$, alegem semnele astfel

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -x + t.$$

După ridicare la pătrat şi alte câteva calcule, obţinem

$$x = \frac{t^2-2}{2t+2}, \quad dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt$$

şi

$$\sqrt{x^2+2x+2} = -x+t = -\frac{t^2-2}{2t+2} + t = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)} \Rightarrow$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+4t+4}{2(t+1)}.$$

Integrala iniţială devine

$$I_1 = \int \frac{2(t+1)}{t^2+4t+4} \cdot \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt = \int \frac{t^2+2t+2}{(t+2)^2(t+1)}dt$$

După descompunerea în fracţii simple avem

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+2)^2} \right) dt = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + \mathcal{C}$$

şi înlocuind cu

$$t = x + \sqrt{x^2+2x+2}$$

obţinem

$$I_1 = \ln(1+x+\sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{2}{2+x+\sqrt{x^2+2x+2}} + \mathcal{C}.$$

Exemplul 2.

$$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}\, dx, \quad x \in (\,2, 5\,).$$

Aplicăm cazul II, $\Delta = 9 > 0$, avem $7x - 10 - x^2 = (x-2)(5-x)$ şi efectuăm substituţia

$$\sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t.$$

După ridicare la pătrat şi simplificare cu $(x-2)$ obţinem

$$x = \frac{2t^2+5}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2}dt$$

şi

$$\sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t = \left(\frac{2t^2+5}{t^2+1} - 2 \right) t = \frac{3t}{t^2+1}.$$

Integrala devine

$$I_2 = \int \frac{2t^2+5}{t^2+1} \cdot \frac{(t^2+1)^3}{27t^3} \cdot \frac{-6t}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{2t^2+5}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\left(2t - \frac{5}{t}\right) + \mathcal{C}.$$

Înlocuind cu

$$t = \sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$$

avem în final

$$I_2 = \frac{2}{9}\left(5\sqrt{\frac{x-2}{5-x}} - 2\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}\right) + \mathcal{C}.$$

Exemplul 3.

$$I_3 = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}\,dx, \quad x \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Aplicăm cazul III, $c = 1 > 0$, utilizăm substituţia

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 - tx.$$

După ridicare la pătrat şi simplificare prin x, găsim

$$x = \frac{2t+1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt$$

şi

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1 - tx = 1 - \frac{t(2t+1)}{t^2+1} = -\frac{t^2+t-1}{t^2+1},$$

iar

$$1 + x = 1 + \frac{2t+1}{t^2+1} = \frac{t^2+2t+2}{t^2+1}.$$

Obţinem

$$I_3 = -\int \frac{t^2+1}{t^2+2t+2} \cdot \frac{t^2+1}{t^2+t-1} \cdot \frac{-2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{2}{t^2+2t+2}dt =$$

$$\int \frac{2}{(t+1)^2+1}dt = 2\,\mathrm{arctg}\,(t+1) + \mathcal{C}.$$

Înlocuind cu

$$t = \frac{1-\sqrt{1+x-x^2}}{x}$$

găsim rezultatul final

$$I_3 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x-\sqrt{1+x-x^2}}{x} + \mathcal{C}.$$