Spații afine. calcul baricentric.

1. Dat K- spațiul afin $\mathcal{A} = \left(X, \overrightarrow{X}, \Phi\right)$, definim o operație de adunare a punctelor cu vectori, $+ : X \times \overrightarrow{X} \to X$, astfel: $\forall P \in X$, $\forall \bar{u} \in \overrightarrow{X}$:

$$P + \bar{u} = \Phi_P^{-1}(\bar{u}) \Leftrightarrow$$
$$P + \bar{u} = Q \Leftrightarrow \bar{u} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow$$
$$P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

   Demonstrați că operația definită anterior are următoarele proprietăți:
   (1) $A + (\overline{u} + \overline{v}) = (A + \overline{u}) + \overline{v},\ \forall A \in X,\ \overline{u}, \overline{v} \in \overrightarrow{X}$;
   (2) $A + \overline{0} = A\ \forall A \in X$;
   (3) $\forall A, B \in X\ \exists! \overline{v} \in \overrightarrow{X}$ *a.î.* $B = A + \overline{v}$.

2. În spațiul afin geometric $(S, \mathcal{V}_3, \Phi)$ se consideră paralelogramul $ABCD$, M mijlocul lui BC, O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Construiți/determinați punctele $D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $O - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $D + 2\overrightarrow{OM}$, $N = O - \overrightarrow{OM}$,$B + \frac{3}{2}\overrightarrow{BO}$, $P = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $Q = N + \overrightarrow{DO}$. Ce figură reprezintă $PNQM$?

3. Dat K- spațiul afin $\mathcal{A} = \left(X, \overrightarrow{X}, \Phi\right)$, fie $P \in X$ fixat arbitrar. Definim $+ : X \times X \to X$ și $\cdot\ : K \times X \to X$ prin

$$\begin{aligned} A + B &= \Phi_P^{-1}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}),\ \forall A, B \in X, \\ \alpha A &= \Phi_P^{-1}(\alpha \overrightarrow{PA}),\ \forall \alpha \in K,\ \forall A \in X. \end{aligned}$$

   Generalizând, obținem expresii de tipul $\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^n A_n$.
   Demonstrați că expresia $\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^n A_n$ nu depinde de alegerea lui P cu ajutorul căruia a fost definită dacă și numai dacă $\sum_{i=1}^n \alpha^i = 1$.

4. Fie $A, B, C \in X$ trei puncte coliniare și distincte într-un K- spațiu afin $\mathcal{A} = \left(X, \overrightarrow{X}, \Phi\right)$. Se numește raportul simplu al punctelor A, B, C, unicul scalar notat $(A, B; C) = \lambda \in K \backslash \{-1, 0\}$ pentru care $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$.
   Arătați că
   (a) $(A, B; C) = \lambda$ dacă și numai dacă $C = \frac{1}{1+\lambda} A + \frac{\lambda}{1+\lambda} B$;
   (b) următoarele condiții sunt echivalente:
      i. $(A, B; C) = \lambda$
      ii. $(A, C; B) = -1 - \lambda$
      iii. $(B, A; C) = \frac{1}{\lambda}$
      iv. $(B, C; A) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$.

5. Fie spațiul afin $\mathbb{R}^4$ cu structura afină canonică. Demonstrați că

$$\mathcal{R} = \{A_1 = (1,0,0,0)\,, A_2 = (0,1,1,0)\,, A_3 = (0,0,1,1)\,, A_4 = (1,1,1,1)\,, A_5 = (0,0,0,1)\}$$

este un reper afin. Determinați coordonatele baricentrice (afine) ale lui $P = (1, 2, 3, 4)$ în raport cu $\mathcal{R}$. Reperului afin $\mathcal{R}$ îi asociem două repere carteziene,

$$\mathcal{R}_1 = \left\{A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_5}\right\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \left\{A_2; \overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}, \overrightarrow{A_2A_5}\right\}.$$

Determinați coordonatele carteziene ale lui P în raport cu $\mathcal{R}_1$, respectiv $\mathcal{R}_2$.