Aplicatii ale marimilor medii in practica

October 5, 2012

Calculul marimilor medii

Consideram o serie de marimi individuale $x_1, \cdots, x_n$ care caracterizeaza evolutia unui fenomen economic, tehnic sau de orice alta natura. Cu ajutorul acestor marimi putem calcula mai multe tipuri de marimi medii, de exemplu:

- media aritmetica simpla:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplu: in cinci ani consecutivi o firma a vandut respectiv 1500, 1900, 2400, 3200 si 4000 calculatoare. Se cere numarul mediu anual de calculatoare vandute.

- media aritmetica ponderata se foloseste in cazul in care in seria de marimi date unele dintre ele se repeta de mai multe ori (ponderea m_i arata ca marimea x_i se repeta de m_i ori):

$$m_{ap} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \quad m_i > 0, \ i \in \overline{1, n}$$

Exemplu: un grup de 40, 20, 60 elevi au primit ca premiu la olimpiada de matematica respectiv 300, 200, 100 lei. Se cere suma de bani medie care revine fiecarui elev.

Calculul marimilor medii

Consideram o serie de marimi individuale $x_1, \cdots, x_n$ care caracterizeaza evolutia unui fenomen economic, tehnic sau de orice alta natura. Cu ajutorul acestor marimi putem calcula mai multe tipuri de marimi medii, de exemplu:

- media aritmetica simpla:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplu: in cinci ani consecutivi o firma a vandut respectiv 1500, 1900, 2400, 3200 si 4000 calculatoare. Se cere numarul mediu anual de calculatoare vandute.

- media aritmetica ponderata se foloseste in cazul in care in seria de marimi date unele dintre ele se repeta de mai multe ori (ponderea m_i arata ca marimea x_i se repeta de m_i ori):

$$m_{ap} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \;\; m_i > 0, \; i \in \overline{1, n}$$

Exemplu: un grup de 40, 20, 60 elevi au primit ca premiu la olimpiada de matematica respectiv 300, 200, 100 lei. Se cere suma de bani medie care revine fiecarui elev.

Calculul marimilor medii

Consideram o serie de marimi individuale $x_1, \cdots, x_n$ care caracterizeaza evolutia unui fenomen economic, tehnic sau de orice alta natura. Cu ajutorul acestor marimi putem calcula mai multe tipuri de marimi medii, de exemplu:

- media aritmetica simpla:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplu: in cinci ani consecutivi o firma a vandut respectiv 1500, 1900, 2400, 3200 si 4000 calculatoare. Se cere numarul mediu anual de calculatoare vandute.

- media aritmetica ponderata se foloseste in cazul in care in seria de marimi date unele dintre ele se repeta de mai multe ori (ponderea m_i arata ca marimea x_i se repeta de m_i ori):

$$m_{ap} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \quad m_i > 0, \ i \in \overline{1, n}$$

Exemplu: un grup de 40, 20, 60 elevi au primit ca premiu la olimpiada de matematica respectiv 300, 200, 100 lei. Se cere suma de bani medie care revine fiecarui elev.

Ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor:

$$m_{ap} = \frac{x_1 \frac{m_1}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100 + x_2 \frac{m_2}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100 + \cdots + x_n \frac{m_n}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100}{100}.$$

Numerele $p_k = \frac{m_m}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100$ se numesc ponderi procentuale si ele sunt in general numere de doua, trei cifre.

- media armonica simpla

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplu: Pretul de cost al unui produs similar la trei fabrici diferite a fost de 400, 500, respectiv 600 lei pe bucata. (El difera de la o intreprindere la alta deoarece depinde de modul de organizare al productiei, de gradul de mecanizare al productiei, de randamentul masinilor folosite, de gradul de calificare al muncitorilor, etc.) Totalul cheltuielilor efectuate pentru realizarea acelei productii la fiecare din cele trei fabrici a fost acelasi. Care este pretul de cost mediu al acelui produs la cele trei fabrici?

Ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor:

$$m_{ap} = \frac{x_1 \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \cdot 100 + x_2 \frac{m_2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \cdot 100 + \cdots + x_n \frac{m_n}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \cdot 100}{100}.$$

Numerele $p_k = \frac{m_m}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \cdot 100$ se numesc ponderi procentuale si ele sunt in general numere de doua, trei cifre.

- media armonica simpla

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplu: Pretul de cost al unui produs similar la trei fabrici diferite a fost de 400, 500, respectiv 600 lei pe bucata. (El difera de la o intreprindere la alta deoarece depinde de modul de organizare al productiei, de gradul de mecanizare al productiei, de randamentul masinilor folosite, de gradul de calificare al muncitorilor, etc.) Totalul cheltuielilor efectuate pentru realizarea acelei productii la fiecare din cele trei fabrici a fost acelasi. Care este pretul de cost mediu al acelui produs la cele trei fabrici?

Ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor:

$$m_{ap} = \frac{x_1 \frac{m_1}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100 + x_2 \frac{m_2}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100 + \cdots + x_n \frac{m_n}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100}{100}.$$

Numerele $p_k = \frac{m_m}{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot 100$ se numesc ponderi procentuale si ele sunt in general numere de doua, trei cifre.

- media armonica simpla

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplu: Pretul de cost al unui produs similar la trei fabrici diferite a fost de 400, 500, respectiv 600 lei pe bucata. (El difera de la o intreprindere la alta deoarece depinde de modul de organizare al productiei, de gradul de mecanizare al productiei, de randamentul masinilor folosite, de gradul de calificare al muncitorilor, etc.) Totalul cheltuielilor efectuate pentru realizarea acelei productii la fiecare din cele trei fabrici a fost acelasi. Care este pretul de cost mediu al acelui produs la cele trei fabrici?

- media armonica ponderata (ponderile $m_i > 0, i \in \overline{1,n}$)

$$m_{hp} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots \frac{m_n}{x_n}}.$$

Exemplu: Retributia medie lunara a unei categorii de angajati ai unei firme pe cele trei trimestre ale unui an a fost 2400, 2580 si respectiv 2700 lei pe luna. Fondul de retributii efectiv pe cele trei trimestre a fost de 600000, 720000, respectiv 900000 lei pe trimestru. Care a fost salariul mediu lunar al unui angajat de la acea firma in cursul acelui an?

- ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor: $p_k = \frac{100 m_k}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$:

$$m_{hp} = \frac{100}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots \frac{p_n}{x_n}}.$$

Exemplu: La o ferma agricola productia de grau la hectar a fost realizata astfel: pe 60% din suprafata cultivata, productia a fost depasita cu 20% fata de plan, pe 30,5% din suprafata productia a fost depasita cu 25%, iar pe restul suprafetei cultivate productia a fost realizata cu 5% sub plan. Care este procentul mediu cu care a fost depasita productia de grau la hectar la acea ferma agricola?

- media armonica ponderata (ponderile $m_i > 0, i \in \overline{1, n}$)

$$m_{hp} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots \frac{m_n}{x_n}}.$$

Exemplu: Retributia medie lunara a unei categorii de angajati ai unei firme pe cele trei trimestre ale unui an a fost 2400, 2580 si respectiv 2700 lei pe luna. Fondul de retributii efectiv pe cele trei trimestre a fost de 600000, 720000, respectiv 900000 lei pe trimestru. Care a fost salariul mediu lunar al unui angajat de la acea firma in cursul acelui an?

- ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor: $p_k = \frac{100 m_k}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$:

$$m_{hp} = \frac{100}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots \frac{p_n}{x_n}}.$$

Exemplu: La o ferma agricola productia de grau la hectar a fost realizata astfel: pe 60% din suprafata cultivata, productia a fost depasita cu 20% fata de plan, pe 30,5% din suprafata productia a fost depasita cu 25%, iar pe restul suprafetei cultivate productia a fost realizata cu 5% sub plan. Care este procentul mediu cu care a fost depasita productia de grau la hectar la acea ferma agricola?

- media armonica ponderata (ponderile $m_i > 0, i \in \overline{1, n}$)

$$m_{hp} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \ldots \frac{m_n}{x_n}}.$$

Exemplu: Retributia medie lunara a unei categorii de angajati ai unei firme pe cele trei trimestre ale unui an a fost 2400, 2580 si respectiv 2700 lei pe luna. Fondul de retributii efectiv pe cele trei trimestre a fost de 600000, 720000, respectiv 900000 lei pe trimestru. Care a fost salariul mediu lunar al unui angajat de la acea firma in cursul acelui an?

- ponderarea se poate face si cu raportul procentual al fiecarei ponderi fata de suma lor: $p_k = \frac{100 m_k}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$:

$$m_{hp} = \frac{100}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \ldots \frac{p_n}{x_n}}.$$

Exemplu: La o ferma agricola productia de grau la hectar a fost realizata astfel: pe 60% din suprafata cultivata, productia a fost depasita cu 20% fata de plan, pe 30,5% din suprafata productia a fost depasita cu 25%, iar pe restul suprafetei cultivate productia a fost realizata cu 5% sub plan. Care este procentul mediu cu care a fost depasita productia de grau la hectar la acea ferma agricola?

- media geometrica simpla se calculeaza atunci cand se dau o serie de marimi pozitive a_i, $i \in \overline{0,n}$ fiecare din ele reprezentand in general o majorare sau o reducere fata de marimea precedenta (in unele cazuri unele dintre aceste marimi pot fi egale intre ele). Notam cu $x_i = \frac{a_i}{a_{i-1}}$, $i \in \overline{1,n}$ raportul dintre o marime si cea precedenta. Obtinem $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = \frac{a_n}{a_0}$.

Presupunem ca variatia acestor marimi este uniforma si egala cu $\bar{x}$ (marime numita coeficientul mediu de variatie). Atunci $\bar{x}^n = \frac{a_n}{a_0}$. Notam cu

$$m_g = \bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Deci coeficientul mediu de variatie a marimilor $a_0, \cdots, a_n$ este egal cu media geometrica a coeficientilor de variatie a fiecarei marimi fata de cea precedenta. Pentru calculul efectiv al mediei geometrice se folosesc logaritmii: $\ln m_g = (\ln x_1 + \cdots \ln x_n) : n$.

Exemplu: Productia de imprimante pe o perioada de cinci ani este data in tabelul de mai jos.

Anul	I	II	III	IV	V
Nr. bucati	4000	6000	7500	9000	11700
Coeficientul de variatie	1	1,5	1,25	1,20	1,30

Care este procentul mediu de crestere a numarului de imprimante in acest interval de timp?

- media geometrica ponderata

(ponderile $r_i > 0$, $i \in \overline{1,n}$, $r = r_1 + \cdots + r_n$)

$$m_{gp} = \sqrt[r]{x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}}.$$

Exemplu: Productia de imprimante pe o perioada de cinci ani este data in tabelul de mai jos.

Anul	I	II	III	IV	V
Nr. bucati	4000	6000	7500	9000	11700
Coeficientul de variatie	1	1,5	1,25	1,20	1,30

Care este procentul mediu de crestere a numarului de imprimante in acest interval de timp?

- media geometrica ponderata

(ponderile $r_i > 0$, $i \in \overline{1, n}$, $r = r_1 + \cdots + r_n$)

$$m_{gp} = \sqrt[r]{x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}}.$$

- media simpla de ordinul $r \in \mathbb{N}$:

$$m_r = \sqrt[r]{\frac{x_1^r + \cdots x_n^r}{n}}$$

- media ponderata de ordinul r:

$$m_{rp} = \sqrt[r]{\frac{m_1 x_1^r + \cdots m_n x_n^r}{m_1 + \cdots m_n}}$$

- Pentru $r = 2$ obtinem media patratica (simpla, respectiv ponderata):

$$m_p = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots x_n^2}{n}}, \quad m_{pp} = \sqrt{\frac{m_1 x_1^2 + \cdots m_n x_n^2}{m_1 + \cdots m_n}}$$

Media patratica este utilizata in statistica. O colectivitate statistica reprezinta o multime de obiecte, fiinte, fenomene, etc care poseda unele caracteristici comune.

Fie $x_1, \cdots, x_n$ elementele unei colectivitati statistice si $\bar{x}$ media lor aritmetica. Atunci diferentele $x_1 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x}$ dintre fiecare element si media lor aritmetica se numesc abateri de la media lor aritmetica. Deoarece media aritmetica a acestor abateri este nula, pentru a calcula media abaterilor se foloseste media aritmetica a patratelor abaterilor, numita dispersie:

$$D(\bar{x}) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Abaterea medie patratica este egala cu radacina patrata a dispersiei

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Ea arata oscilatia sau diversitatea distributiei elementelor x_i din colectivitatea statistica pe care o studiem. (Daca abaterile $| x_i - \bar{x} |$sunt mici, inseamna ca marimile x_i difera putin de la media lor aritmetica. In acest caz si dispersia cat si abaterea medie patratica vor fi mici. Daca abaterile $| x_i - \bar{x} |$ sunt mari, atunci si D si σ vor fi mari.)

Media patratica este utilizata in statistica. O colectivitate statistica reprezinta o multime de obiecte, fiinte, fenomene, etc care poseda unele caracteristici comune.
Fie $x_1, \cdots, x_n$ elementele unei colectivitati statistice si $\bar{x}$ media lor aritmetica. Atunci diferentele $x_1 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x}$ dintre fiecare element si media lor aritmetica se numesc abateri de la media lor aritmetica. Deoarece media aritmetica a acestor abateri este nula, pentru a calcula media abaterilor se foloseste media aritmetica a patratelor abaterilor, numita dispersie:

$$D(\bar{x}) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Abaterea medie patratica este egala cu radacina patrata a dispersiei

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Ea arata oscilatia sau diversitatea distributiei elementelor x_i din colectivitatea statistica pe care o studiem. (Daca abaterile $\mid x_i - \bar{x} \mid$sunt mici, inseamna ca marimile x_i difera putin de la media lor aritmetica. In acest caz si dispersia cat si abaterea medie patratica vor fi mici. Daca abaterile $\mid x_i - \bar{x} \mid$ sunt mari, atunci si D si σ vor fi mari.)

Media patratica este utilizata in statistica. O colectivitate statistica reprezinta o multime de obiecte, fiinte, fenomene, etc care poseda unele caracteristici comune.

Fie $x_1, \cdots, x_n$ elementele unei colectivitati statistice si $\bar{x}$ media lor aritmetica. Atunci diferentele $x_1 - \bar{x}, \cdots, x_n - \bar{x}$ dintre fiecare element si media lor aritmetica se numesc abateri de la media lor aritmetica. Deoarece media aritmetica a acestor abateri este nula, pentru a calcula media abaterilor se foloseste media aritmetica a patratelor abaterilor, numita dispersie:

$$D(\bar{x}) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Abaterea medie patratica este egala cu radacina patrata a dispersiei

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Ea arata oscilatia sau diversitatea distributiei elementelor x_i din colectivitatea statistica pe care o studiem. (Daca abaterile $| x_i - \bar{x} |$sunt mici, inseamna ca marimile x_i difera putin de la media lor aritmetica. In acest caz si dispersia cat si abaterea medie patratica vor fi mici. Daca abaterile $| x_i - \bar{x} |$ sunt mari, atunci si D si σ vor fi mari.)

Criteriu pentru aplicarea in practica a marimilor medii

Cum ne dam seama ce tip de medie vom folosi intr-o anumita problema?
Teoria Chissini-Boiarschi :

- o colectivitate statistica poate avea diferite proprietati, o parte dintre ele putand fi exprimate numeric;
- o proprietate se numeste determinanta pentru o colectivitate statistica daca ea ramane neschimbata cand variabila x ia toate valorile posibile $x_1, \cdots, x_n$;
- proprietatea determinanta se exprima ca o functie de variabilele x_i; $F(x_1, \cdots, x_n)$;
- se numeste valoare medie a variabilei x, dupa proprietatea determinanta, acea valoare $\bar{x}$ care, prin substitutia $x_i = \bar{x}$, $i \in \overline{1, n}$, nu modifica proprietatea determinanta: $F(\bar{x}, \cdots, \bar{x}) = F(x_1, \cdots, x_n)$.
  Exemplificam in continuare aplicarea aceastei teorii.

Problema 1

Titlul unui aliaj reprezinta cantitatea de aur pur continut intr-un gram de aliaj. Se topesc impreuna n aliaje de aur $A_1, A_2, \cdots, A_n$ care au respectiv titlurile $t_1, t_2, \cdots, t_n$ si masele $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Se cere titlul noului aliaj.

Solutie

Proprietatea determinanta a tuturor aliajelor este cantitatea de aur pur continuta in intregul aliaj.

Cantitatea de aur G_i continuta in aliajul A_i este $G_i = m_i t_i, \;\; i \in \overline{1,n}$. Deci cantitatea de aur pur continuta in intregul aliaj se calculeaza prin

$$F(t_1, \cdots, t_n) = m_1 t_1 + m_2 t_2 + \cdots m_n t_n.$$

Notam cu $\bar{t}$ valoarea medie a titlului noului aliaj rezultat dupa topirea celor n aliaje initiale. Atunci $F(\bar{t}, \bar{t}, \cdots, \bar{t}) = F(t_1, \cdots, t_n)$, deci

$$\bar{t} = \frac{m_1 t_1 + \cdots m_n t_n}{m_1 + \cdots m_n},$$

deci in acest exemplu folosim media aritmetica ponderata.

Problema 1

Titlul unui aliaj reprezinta cantitatea de aur pur continut intr-un gram de aliaj. Se topesc impreuna n aliaje de aur $A_1, A_2, \cdots, A_n$ care au respectiv titlurile $t_1, t_2, \cdots, t_n$ si masele $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Se cere titlul noului aliaj.

Solutie

Proprietatea determinanta a tuturor aliajelor este cantitatea de aur pur continuta in intregul aliaj.

Cantitatea de aur G_i continuta in aliajul A_i este $G_i = m_i t_i, \ i \in \overline{1, n}$. Deci cantitatea de aur pur continuta in intregul aliaj se calculeaza prin

$$F(t_1, \cdots, t_n) = m_1 t_1 + m_2 t_2 + \cdots m_n t_n.$$

Notam cu $\bar{t}$ valoarea medie a titlului noului aliaj rezultat dupa topirea celor n aliaje initiale. Atunci $F(\bar{t}, \bar{t}, \cdots, \bar{t}) = F(t_1, \cdots, t_n)$, deci

$$\bar{t} = \frac{m_1 t_1 + \cdots m_n t_n}{m_1 + \cdots m_n},$$

deci in acest exemplu folosim media aritmetica ponderata.

Problema 2

Preturile de cost ale unui produs similar la n fabrici sunt respectiv $c_1, c_2, \cdots, c_n$ lei/unitate de produs. Totalul cheltuielolor efective pentru realizarea productiei la fiecare din cele n fabrici a fost acelasi, C lei. Se cere pretul de cost mediu al acelui produs la cele n fabrici.

Solutie

Proprietatea determinanta este cantitatea totala a productiei realizata la cele n fabrici. Productia realizata la fabrica i, $i \in \overline{1, n}$ se calculeaza prin $\frac{C}{c_i}$. Functia determinanta va fi egala cu $F(c_1, \cdots, c_n) = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \cdots + \frac{C}{c_n}$. Fie $\bar{c}$ pretul de cost mediu realizat la cele n fabrici. Rezulta $F(\bar{c}, \cdots \bar{c}) = F(c_1, \cdots, c_n)$, deci

$$\bar{c} = \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}}.$$

In aceasta problema se foloseste media armonica simpla.

Problema 2

Preturile de cost ale unui produs similar la n fabrici sunt respectiv $c_1, c_2, \cdots, c_n$ lei/unitate de produs. Totalul cheltuielolor efective pentru realizarea productiei la fiecare din cele n fabrici a fost acelasi, C lei. Se cere pretul de cost mediu al acelui produs la cele n fabrici.

Solutie

Proprietatea determinanta este cantitatea totala a productiei realizata la cele n fabrici. Productia realizata la fabrica i, $i \in 1, n$ se calculeaza prin $\frac{C}{c_i}$. Functia determinanta va fi egala cu $F(c_1, \cdots, c_n) = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \cdots + \frac{C}{c_n}$. Fie $\bar{c}$ pretul de cost mediu realizat la cele n fabrici. Rezulta $F(\bar{c}, \cdots \bar{c}) = F(c_1, \cdots, c_n)$, deci

$$\bar{c} = \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}}.$$

In aceasta problema se foloseste media armonica simpla.

Problema 3

In n perioade de timp consecutive pretul de cost al unui produs la o intreprindere industriala a fost de $c_1, \cdots, c_n$ lei/unitate de produs. Stiind ca totalul cheltuielilor efective realizate pe cele n perioade de timp a fost respectiv de $S_1, \cdots, S_n$ lei, se cere pretul de cost mediu al acelui produs pe intreaga perioada de timp luata in considerare.

Solutie

Ca si in problema anterioara proprietatea determinanta este intreaga cantitate de produse realizata in cele n perioade de timp si se calculeaza prin $F(c_1, \cdots, c_n) = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \cdots + \frac{S_n}{c_n}$. Se obtine

$$\bar{c} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots S_n}{\frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \cdots + \frac{S_n}{c_n}},$$

deci folosim media armonica ponderata.

Problema 3

In n perioade de timp consecutive pretul de cost al unui produs la o intreprindere industriala a fost de $c_1, \cdots, c_n$ lei/unitate de produs. Stiind ca totalul cheltuielilor efective realizate pe cele n perioade de timp a fost respectiv de $S_1, \cdots, S_n$ lei, se cere pretul de cost mediu al acelui produs pe intreaga perioada de timp luata in considerare.

Solutie

Ca si in problema anterioara proprietatea determinanta este intreaga cantitate de produse realizata in cele n perioade de timp si se calculeaza prin $F(c_1, \cdots, c_n) = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \cdots + \frac{S_n}{c_n}$. Se obtine

$$\bar{c} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots S_n}{\frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \cdots + \frac{S_n}{c_n}},$$

deci folosim media armonica ponderata.

Problema 4

Pretul de cost al unui produs oarecare in valoare de C_0 lei a suferit n variatii cu procentele $p_1, \cdots, p_n$ in n perioade de timp consecutive. Se cere procentul mediu de variatie a pretului de cost la acel produs si costul final C_n al produsului, dupa cele n variatii succesive.

Solutie

Functia determinanta este pretul de cost al produsului dupa cele n variatii, adica $F(p_1, \cdots, p_n) = C_0(1 + \frac{p_1}{100}) \cdots (1 + \frac{p_n}{100})$. Notam cu $\bar{p}$ procentul mediu de variatie a pretului de cost. Atunci $F(\bar{p}, \cdots, \bar{p}) = F(p_1, \cdots, p_n)$ si rezulta

$$C_0(1 + \frac{\bar{p}}{100}) \cdots (1 + \frac{\bar{p}}{100}) = C_0(1 + \frac{p_1}{100}) \cdots (1 + \frac{p_n}{100}),$$

deci

$$\bar{p} = 100 \left[\sqrt[n]{(1 + \frac{p_1}{100}) \cdots (1 + \frac{p_n}{100})} - 1 \right].$$

Notam cu $\bar{c} = 1 + \frac{\bar{p}}{100}$ si $c_i = 1 + \frac{p_i}{100}$, $i \in \overline{1, n}$. Atunci

$$\bar{c} = \sqrt[n]{c_1 c_2 \cdots c_n}.$$

Folosim asadar media geometrica simpla.

Pretul de cost al unui produs oarecare in valoare de C_0 lei a suferit n variatii cu procentele $p_1, \cdots, p_n$ in n perioade de timp consecutive. Se cere procentul mediu de variatie a pretului de cost la acel produs si costul final C_n al produsului, dupa cele n variatii succesive.

Solutie

Functia determinanta este pretul de cost al produsului dupa cele n variatii, adica $F(p_1, \cdots, p_n) = C_0(1+\frac{p_1}{100})\cdots(1+\frac{p_n}{100})$. Notam cu $\bar{p}$ procentul mediu de variatie a pretului de cost. Atunci $F(\bar{p}, \cdots, \bar{p}) = F(p_1, \cdots, p_n)$ si rezulta

$$C_0(1+\frac{\bar{p}}{100})\cdots(1+\frac{\bar{p}}{100}) = C_0(1+\frac{p_1}{100})\cdots(1+\frac{p_n}{100}),$$

deci

$$\bar{p} = 100\left[\sqrt[n]{(1+\frac{p_1}{100})\cdots(1+\frac{p_n}{100})} - 1\right].$$

Notam cu $\bar{c} = 1 + \frac{\bar{p}}{100}$ si $c_i = 1 + \frac{p_i}{100}$, $i \in \overline{1, n}$. Atunci

$$\bar{c} = \sqrt[n]{c_1 c_2 \cdots c_n}.$$

Folosim asadar media geometrica simpla.

Problema 5

Consumul de benzina al unei masini pe ora este proportional cu patratul vitezei acelei masini. Notam cu t_i intervalele de timp in care a mers masina, v_i vitezele (constante) corespunzatoare acestor intervale, $i \in \overline{1,n}$. Se cere viteza medie $\bar{v}$ cu care va trebui sa mearga masina pentru ca sa consume in total aceeasi cantitate de benzina.

Solutie

Proprietatea determinanta este cantitatea totala de benzina consumata de masina pe intreaga perioada de timp:

$$F(v_1, \cdots, v_n) = kt_1 v_1^2 + \cdots kt_n v_n^2,$$

unde k este constanta de proportionalitate. Din $F(\bar{v}, \cdots, \bar{v}) = F(v_1, \cdots, v_n)$ rezulta

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{t_1 v_1^2 + \cdots t_n v_n^2}{t_1 + \cdots t_n}}$$

Folosim astfel media patratica ponderata.

Problema 5

Consumul de benzina al unei masini pe ora este proportional cu patratul vitezei acelei masini. Notam cu t_i intervalele de timp in care a mers masina, v_i vitezele (constante) corespunzatoare acestor intervale, $i \in \overline{1, n}$. Se cere viteza medie $\bar{v}$ cu care va trebui sa mearga masina pentru ca sa consume in total aceeasi cantitate de benzina.

Solutie

Proprietatea determinanta este cantitatea totala de benzina consumata de masina pe intreaga perioada de timp:

$$F(v_1, \cdots, v_n) = kt_1 v_1^2 + \cdots kt_n v_n^2,$$

unde k este constanta de proportionalitate. Din $F(\bar{v}, \cdots, \bar{v}) = F(v_1, \cdots, v_n)$ rezulta

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{t_1 v_1^2 + \cdots t_n v_n^2}{t_1 + \cdots t_n}}$$

Folosim astfel media patratica ponderata.

Teme seminar

- Stabiliti relatiile intre marimile medii si interpretarea lor geometrica.
- Teoreme de maxim si minim bazate pe relatiile intre marimile medii.
- Probleme practice de maxim si minim in care folosim marimile medii.
- Bibliografie:

    - M. Cerchez, T. Danet, Probleme pentru aplicarea matematicii in practica, E.D.P, Bucuresti 1982.
    - C. Udriste, E. Tanasescu, Minime si maxime ale functiilor reale de variabile reale, Ed. Tehnica, Bucuresti 1980.