

# Indrumari metodice privind predarea geometriei in gimnaziu

Oana Constantinescu

March 2, 2009

## Contents

<b>1</b>	<b>Formarea conceptelor geometrice</b>	<b>1</b>
1.1	Stadiul operatiilor concrete (clasele I-V) . . . . .	1
1.2	Etapa gandirii formale . . . . .	3
1.3	Sugestii utile formarii conceptelor de baza ale geometriei. . . . .	5
<b>2</b>	<b>Aspecte specifice predarii geometriei in spatiu</b>	<b>6</b>

Acest material este inspirat din: O. Popescu, V. Radu, Metodica predarii geometriei in gimnaziu, E.D.P. Bucuresti, 1983.

## 1 Formarea conceptelor geometrice

Deoarece geometria riguroasa, bazata pe demonstratii, necesita formarea conceptelor geometrice si realizarea unor operatii logice, deductive cu aceste abstractiuni, predarea geometriei trebuie sa tina cont de etapele mentale de dezvoltare proprii copilului.

### 1.1 Stadiul operatiilor concrete (clasele I-V )

In aceasta etapa putem vorbi mai degraba de o [predare pregeometrica](#), al carei rol este de a pregati elevul pentru stadiul urmator. Coordonarea activitatii mentale functioneaza doar in raport cu realitatea concreta a lucrurilor. La aceasta varsta elevul reuseste deja sa clasifice, sa ierarhizeze, sa sintetizeze si sa compare. Se finalizeaza formarea conceptului de numar. Acest prim stadiu este caracterizat de introducerea formelor geometrice prin cercetarea directa a unor obiecte materiale, apoi prin desenarea unor figuri, prin masurarea concreta a

unor distante, a unor arii si volume, folosind unitati de masura nonstandard. Elevul incepe sa isi formeze convingeri despre conservarea distantelor, a ariei, a volumelor, a greutatilor, atunci cand forma unora sufera modificari. Deci intuitia joaca un rol esential, si proprietatile figurilor geometrice sunt treptat "simtite" de catre elevi.

### Fondul de reprezentari geometrice al absolventilor clasei a V-a

- Elevii folosesc cuvantul "**segment**" pentru urma lasata de creion pe hartie, atunci cand se unesc, cu ajutorul riglei, doua puncte date. Ei stiu sa masoare cu rigla aceste desene, sa le compare in raport cu rezultatul masuratorii sau in raport cu pozitiile lor. Stiu sa deseneze segmente de lungimi date, avand extremitatile libere, alese de ei. Apare scrierea  $AB+BC$ ,  $AB$  si  $BC$  reprezentand segmente nesituate in mod obligatoriu pe aceeasi dreapta, intelegandu-se ca este vorba de fapt de adunarea lungimilor segmentelor, rezultatul fiind un numar care nu reprezinta neaparat lungimea altui segment. Astfel se formeaza imaginea de segment, ce pregateste edificarea conceptului matematic ce defineste aceeasi notiune. Se introduce tot prin desen **linia franta**.
- **Linia curba** se introduce ca denumire a unei imagini grafice ce prezinta anumite particularitati percepute exclusiv vizual de catre elevi. Ei o deosebesc de linia franta si de segment. Aceste imagini grafice pe care elevii le deseneaza, le denumesc si le compara nu sunt concepute deocamdata ca multimi de puncte, deoarece nici punctul nu a fost desprins de semnul grafic prin care se deseneaza.
- Elevilor li s-au prezentat imagini grafice numite **unghiuri**. Ei stiu sa denumeasca elementele care caracterizeaza aceste imagini: laturi, varf, deschidere. Stiu sa deseneze un unghi, sa-l noteze, sa-l citeasca. Deoarece pana in clasa a VI-a nu se foloseste raportorul (singurele instrumente sunt rigla si echerul), compararea unghiurilor se face prin decupare si suprapunere, apoi vizual.
- Recunoasterea si desenarea figurilor geometrice se realizeaza concentric, de la segmente, linii frante si curbe, la poligoane: paralelogram, dreptunghi, romb, patrat, etc.
- Cea mai mare parte a figurilor geometrice prezentate sunt plane, dar chiar din timpul invatamantului primar elevii privesc si actioneaza asupra unor corpuri geometrice spatiale. Dirijati de catre profesor, ei desprind unele particularitati ale acestora, le denumesc si invata sa le deseneze: paralelipiped, prisma, piramida, cilindru, con, sfera. Deoarece in clasele VI-VII se studiaza doar geometria plana, este obligatoriu ca la inceputul clasei a VIII-a sa se reia introducerea concreta, cu ajutorul modelelor, a principalelor corpuri geometrice intalnite de elevi inclusiv in clasa a V-a.

Deci, introducerea unor concepte geometrice (in etapa urmatoare) este pregatita prin perceperea, observarea, analiza si generalizarea proprietatilor spatiale ale unor obiecte reale. Aceasta observare nu este contemplativa ci una activa, o actiune a elevului asupra obiectului, actiune dirijata de profesor.

Personal consideram ca se neglijeaza pregatirea conceptului de arie si volum. Elevii sunt acomodatati cu ideea de lungime a unui segment, dar exercitiile practice privind masurarea ariei unei suprafete poligonale, a volumului unui poliedru, sunt extrem de putine. Se pot concepe exercitii distractive prin care elevii sa intuiasca urmatoarele aspecte:

- necesitatea introducerii unui alt tip de unitati de masura pentru masurarea suprafetelor si a poliedrelor; elevii sa distinga senzorial ideea de suprafata, poliedru;
- exercitii de intuire a conservarii ariilor, volumelor;
- descoperirea proprietatii de aditivitate a functiilor arie, volum;
- posibilitatea alegerii diverselor unitati de masura (de preferat nonstandard mai intai);
- compararea numerelor ce reprezinta rezultatul acestor masuratori, cand se foloseste aceeasi unitate de masura, duce la compararea unor suprafete, respectiv poliedre, in raport cu "marimea" lor;
- astfel, elevul descopera ca fiecarei suprafete poligonale i se atribuie un numar pozitiv, care are proprietatea de aditivitate si impune existenta unei suprafete unitate; astfel se contureaza ideea de functie arie, fara a fi clar definita; analog in ceea ce priveste volumul.

## 1.2 Etapa gandirii formale

(incepand cu varsta de **11-12 ani** si care dureaza si pe parcursul adolescentei) Doar din clasa a VI-a elevul poate trece la operatii cu propozitii matematice, intr-o maniera ipotetico-deductiva, fara a se mai baza pe obiecte concrete. Elevii pot forma acum rationamente de tipul "daca....atunci", pot sesiza incompatibilitati, disjunctii, conjunctii, etc. Copilul incepe sa simta necesitatea unor demonstratii matematice. El poate efectua operatii asupra unor propozitii admise ipotetic adevarate, fara a verifica veridicitatea lor printr-o operatie concreta. Acest tip de operatii deductive actioneaza asupra conceptelor abstrase din realitate.

Este esential sa nu se grabeasca introducerea demonstratiei. Poate cel mai frumos exprima aceasta convingere matematicianul H. Freudenthal: *"Intr-o zi copilul va intreba "de ce?", si nu este de folos sa incepem geometria sistematica inainte ca acel moment sa fi venit. Ba mai mult, i-ar putea dauna cu adevarat. Daca am cazut de acord asupra predarii geometriei ca un mijloc de a-i face pe*

*copii sa simta forta spiritului omenesc, a propriului lor spirit, nu trebuie sa-i lipsim de dreptul de a face ei insusi descoperiri. Cheia geometriei este expresia "de ce". Numai ucigasii de bucurii vor inmana cheia mai devreme.*" (Gazeta matematica, seria A, nr. 2, 3, 1958)

In concluzie, dezvoltarea progresiva a inteligentei face posibil studiul geometriei bazate pe demonstratii numai pe un anumit palier al acestei dezvoltari. In plus, principiul intuitiei isi pastreaza o valoare didactica de necontestat.

Dar ce intelegem prin **concepte geometrice**? Acestea sunt reflectari idealizate ale unor proprietati spatiale ale obiectelor si fenomenelor lumii reale. Ele sunt abstractiuni, in ele nu retinem imaginea obiectelor perceputa senzorial, ci ideea care ramane prin abstragerea proprietatilor comune. Conceptele geometrice sunt entitati ce au o perfectiune care nu poate exista decat in mintea noastra. De aceea un concept geometric nu se creeaza spontan, ci in urma unui proces psihic asupra caruia isi pun amprenta imaginatia, creativitatea, puterea de generalizare si abstractizare. De exemplu, conceptul de poliedru nu cuprinde nici o referire la forma fetelor, la masura diedrelor ce apar, etc. Acestea nu sunt proprietati comune tuturor poliedrelor.

Conceptele geometrice formeaza sisteme ierarhice, nu sunt entitati mentale izolate. De exemplu conceptele de triunghi, triunghi isoscel, triunghi echilateral, etc.

Operatiile cu concepte se realizeaza intotdeauna pe plan mental. Atunci cand determinam o sectiune intr-un cub nu taiem efectiv cubul si studiem sectiunea concreta, ci ne imaginam, intuim aceasta sectiune si demonstram, prin rationamente deductive, ca sectiunea este un triunghi de exemplu.

Deci, aceste forme pure vor fi situate de elev intr-un spatiu idealizat, ale carui submultimi vor fi figurile geometrice. Cu ajutorul acestor figuri intuim conceptul. Ele sunt tot abstracte. In problema anterioara nu sectionam conceptul, ci figura mentala prin care am intuit conceptul. Deci figura este o entitate abstracta, dar, totusi, intuitiva. Astfel, in clasa a VI-a figura geometrica apare pentru elevi in doua ipostaze:

- ca reflectare idealizata a unor proprietati spatiale pure;
- ca posibilitate de concretizare a unor concepte.

In timpul demonstratiilor geometrice nu putem renunta la figura, ne folosim de ea pentru a reprezenta simplificat unele operatii mentale. De exemplu, pentru o problema referitoare la triunghi, ne imaginam si desenam un triunghi. Triunghiul desenat este unul oarecare, reprezentand o intreaga clasa de triunghiuri cu o anumita proprietate specificata in enuntul problemei. Pe de alta parte, el a devenit un triunghi particular, cu dimensiuni fixate, atunci cand l-am desenat. Elevii trebuie sa inteleaga ca demonstratia facuta este adevarata pentru orice triunghi cu proprietatea data, chiar daca s-a utilizat aceasta figura. Deci trebuie sa faca distinctia intre desenul geometric, caruia ii ataseaza atribute materiale, si figura geometrica, entitate mentala. Profesorul supune unor operatii logico-deductive figuri abstracte subordonate unui concept, nu aplica aceste operatii

unor desene. Gesturile prin care desenam concret pe foaie, tabla, sugereaza operatiile mentale pe care le facem asupra figurii geometrice.

In procesul de desubstantializare a figurilor geometrice, distingem deci etapele:

1. interpretarea grafica: figura geometrica este una desenata; proprietatile ei sunt cele ale desenului;
2. interpretarea conceptuala: figura geometrica este un mijloc de intuire a unui concept, avand toate attributele acestuia.

### 1.3 Sugestii utile formarii conceptelor de baza ale geometriei.

**Punctul:** pentru ca elevii sa-si imagineze punctul ca o entitate mentala, parcurgem etapele:

1. desenam un punct;
2. observam ca putem folosi creioane de grosimi diferite;
3. intotdeauna ne putem imagina o urma mai mica decat cea lasata pe caiet (sau pe tabla), deci treptat aceasta urma nu va mai fi vizibila cu ochiul liber;
4. fiind atat de "mic", ne imaginam punctul fara greutate;
5. putand fi desenat ca intersectia a doua drepte de exemplu, ne putem imagina ca punctul de fapt nu are forma;
6. astfel, apare ideea unui punct fara intindere, greutate, forma, punct ce poate exista evident doar mental.

**Dreapta:**

1. elevii traseaza cu ajutorul riglei o dreapta; (de fapt un segment)
2. folosind doua creioane ascutite diferit, pastrand nemiscata rigla, vor trasa o singura dreapta sau doua?
3. putem desena drepte din ce in ce mai subtiri, pana cand devin invizibile;
4. dreapta nu mai are deci grosime, avem o imagine mentala a acesteia, deci ea va fi automat o multime de puncte mentale, fara attribute senzoriale.

Aceasta perceptie a dreptei ca o multime de puncte apare si in urma discutarii obligatorii a pozitiiilor relative ale unui punct fata de o dreapta. Astfel, elevii rezolva probleme prin care stabilesc apartenenta sau nonapartenenta unui punct la o dreapta, transcriu aceasta relatie folosind simboluri matematice. Urmeaza

apoi etapa prin care elevii inteleg modurile de determinare unica a drepte si pozitiile relative a doua drepte (in plan, respectiv in spatiu).

Semidreapta, segmentul de dreapta, unghiul, planul sunt introduse in mod analog, ca multimi de puncte abstracte. Dupa desubstantializarea acestor elemente si crearea conceptelor, se rezolva probleme privind pozitiile relative ale acestora in plan, respectiv in spatiu.

## 2 Aspecte specifice predarii geometriei in spatiu

- Deoarece cu notiunile de baza se opereaza in toate problemele viitoare, primul capitol in care se stabilesc **pozitiile relative** ale acestora trebuie predat si consolidat cu foarte mare grija. Nu este o pierdere de timp daca se insista in aceasta prima etapa, sunt foarte utile si problemele de constructie cu diverse instrumente geometrice.
- **Realizarea desenului** unei figuri geometrice in spatiu ocupa de asemenea un rol major. Deoarece toate desenele se fac pe tabla, planul de desen este deci unul vertical. Chiar daca elevii deseneaza pe un plan orizontal, ei copie desenul de pe tabla, deci il vor realiza ca si cum ar fi intr-unul vertical. Pentru a putea desena bidimensional un corp tridimensional sunt utile cateva conventii de desen:
  - toate segmentele paralele cu planul de desen vor fi reprezentate cu segmente congruente cu cele date, iar cele perpendiculare pe planul de desen vor fi paralele intre ele si inclinate fata de primele, de regula, cu un unghi de 45;
  - toate celelalte linii si segmente vor fi inclinate cu un alt unghi ales convenabil; dreptele paralele vor fi astfel reprezentate in planul desenului tot prin drepte paralele;
  - anumite linii care in realitate nu se vad vor fi desenate punctat.
- Repetam observatia ca la inceputul clasei a VIII-a este util sa se formeze conceptele geometrice tot prin **cercetarea directa a corpurilor materiale**. Chiar daca elevii au operat mental cu concepte abstracte timp de doi ani, ele erau unele simplificate, in plan, astfel ca utilizarea intuitiei devine din nou stringenta. Ideal ar fi parcurgerea urmatoarelor etape:
  1. prezentarea unui model material al problemei propuse, insotit de comentarii intuitive, nu neaparat strict riguroase din punct de vedere al terminologiei; de exemplu, sa presupunem ca vrem sa demonstram ca un plan taie doua plane paralele dupa drepte paralele; putem simboliza cele doua plane paralele prin placi subtiri de poliestiren, iar

planul ce le intersecteaza printr-o placa de plastic rigid (sau metal), care perforeaza efectiv placile de poliestiren; vedem astfel concret ca intersectiile sunt "paralele"; profesorul este obligat sa-si pregateasca o trusa bogata cu modele geometrice adecvate studiului geometriei in spatiu;

2. realizarea unor desene care sa redea aspectele spatiale ale modelelor materiale; pe tabla si in caiete se deseneaza cele trei plane, utilizand conventiile de desen in spatiu;
3. realizarea rationamentelor in care se opereaza cu abstractiunile intuitive; se subliniaza ipotezele problemei, concluzia, se schiteaza acestea folosind simbolistica uzuala, apoi se trece la o demonstratie deductiva (ori analitica, prin reducere la absurd, etc, dupa cum o cere problema) motivand riguros fiecare pas si folosind limbajul matematic corespunzator; in aceasta etapa nu mai sunt permise exprimari sau scrieri aproximative.

Din cele expuse pana acum, distingem deci urmatoarele **obiective ale predarii geometriei in gimnaziu**:

- edificarea conceptelor geometrice, clarificarea relatiilor intuitiv-abstract, intuitiv-conceptual;
- deprinderea cu demonstrarea unor propozitii pornind de la altele despre care se stie ca sunt adevarate;
- consolidarea deprinderilor de calcul aritmetic si algebric;
- dezvoltarea capacitatii de a executa constructii geometrice corecte;
- stapanirea pozitiiilor relative ale punctelor, dreptelor, planelor in spatiu;
- utilizarea cunostintelor privind pozitiiile relative in studiul unor corpuri geometrice.